

## Anwendungsaufgaben

1.0 Für den Wert  $W(t)$  eines Autos (in DM) in Abhängigkeit von der Zeit  $t \geq 0$  (in Tagen) gelte der Zusammenhang  $W(t) = W_0 \cdot e^{kt}$  mit einer geeigneten Konstanten  $k$  und dem Neupreis  $W_0$ . Die Benennungen können in den Formeln jeweils weggelassen werden. (Abitur 2000 AI)

1.1 Ein Händler geht davon aus, dass sich der Wert eines bestimmten Autotyps nach 3,5 Jahren (1 Jahr = 360 Tage) halbiert hat. Berechnen Sie daraus die Konstante  $k$ . 

(Ergebnis:  $k = -\frac{\ln 2}{1260}$ )

1.2 Zum Zeitpunkt  $t = t_E$  hat ein Auto dieses Typs, das einen Neupreis von 35000 DM hat, noch einen „Schrottwert“ von 1500 DM. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt  $t_E$ . 

1.3 Nun wird die Ableitungsfunktion  $W'$ :  $W'(t) = \frac{dW(t)}{dt}$  und  $t \in ]0; t_E[$  betrachtet.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $W'(t)$  an den Randstellen des Definitionsbereichs und interpretieren Sie die Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang. 

2.0 Die Geschwindigkeit  $v$  eines in einer bestimmten Flüssigkeit unter Reibungseinfluss fallenden Körpers kann mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  durch den folgenden Funktionsterm dargestellt werden:  $v(t) = 15 \cdot (1 - e^{-0,654t})$  für  $t \geq 0$ .

Grundlage für die folgenden Teilaufgaben sind die bekannten physikalischen Zusammenhänge, dass die Geschwindigkeitsfunktion die Ableitungsfunktion der Ortsfunktion und die Beschleunigungsfunktion die Ableitungsfunktion der Geschwindigkeitsfunktion ist (Abitur 2003 AII).

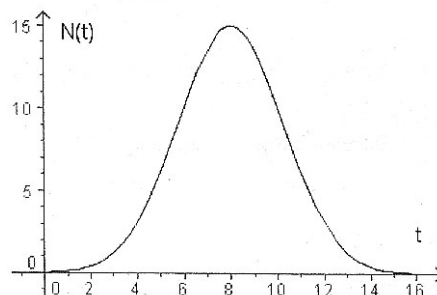
2.1 Berechnen Sie  $v(0)$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  und interpretieren Sie die Ergebnisse in dem gegebenen Zusammenhang. 

2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt  $t_1$ , an dem gilt:  $v(t_1) = 9,0$ .   
(Ergebnis:  $t_1 \approx 1,4$ )

2.3 Berechnen Sie für  $t = 0$  und für  $t = t_1$  ohne Benennungen die Werte der Beschleunigung, die der Körper momentan erfährt. 

2.4 Berechnen Sie die im Zeitintervall  $[0; t_1]$  durchfallene Strecke. 

- 3.0 Untenstehendes Diagramm entspricht näherungsweise dem Verlauf einer lokal beschränkten Epidemie innerhalb einer Bevölkerung. Für die zeitliche Abhängigkeit der Anzahl der Erkrankten in Tausend gilt ohne Berücksichtigung der Einheiten die Gleichung  $N(t) = 15 \cdot e^{-0,1(t-8)^2}$ , wobei  $t$  als Zeitangabe in Wochen zu interpretieren ist. Zunächst sind nur wenige Personen von der Krankheit betroffen, jedoch breitet sie sich wegen der hohen Ansteckungsgefahr schnell in der Bevölkerung aus. Wegen der anlaufenden Impfkation und der Personen, die die Krankheit überstanden haben, steigt der Bevölkerungsanteil der gegen die Krankheit immunen Menschen. Dadurch sinkt der Anstieg der Neuerkrankungen und die Epidemie klingt ab (Abitur 2006 AI).



- 3.1 Berechnen Sie die Zeitspanne, in der sich die Anzahl der Krankheitsfälle bezogen auf das Ende der 1. Woche auf den dreifachen Wert vergrößert. ☒
- 3.2 Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, in dem die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Krankheit am stärksten ist. Geben Sie auch die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag für diesen Zeitpunkt an. ☒
- 3.3 Ermitteln Sie durch Rechnung den Hochpunkt der Funktion  $N$  und interpretieren Sie die Koordinaten des Hochpunkts im Sinne der Aufgabenstellung. ☐
- 3.4 Die Epidemie gilt als überstanden, wenn wieder der Krankenstand wie zur Zeit  $t = 0$  erreicht ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt. ☐
- 4.0 Gegeben ist die reelle Funktion  $G(t) = G_0 \cdot e^{kt}$  mit  $t \in \mathbb{R} \wedge t > 0$ ,  $G_0 \in \mathbb{R} \wedge G_0 > 0$  und  $k \in \mathbb{R}$ .  $G(t)$  beschreibt die exponentielle Zunahme bzw. Abnahme einer Anfangsmenge  $G_0$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (Abitur 2006 AII).
- 4.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von  $k$  die Funktion  $G$  einen Wachstums- bzw. einen Abnahmeprozess beschreibt. ☐

$G(t)$  beschreibt im Folgenden für  $t \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Geburten eines bestimmten Kalenderjahres in Deutschland. Im Jahr 2003 wurden  $709,4 \cdot 10^3$  Geburten registriert. Aus den vorangegangenen Jahren ergibt sich für  $k$  der auch für die fraglichen Zeiträume der folgenden Teilaufgaben als konstant angenommene Wert  $k = -0,01213$ .

4.2 Erstellen Sie eine Prognose für die Anzahl der Geburten in Deutschland im Jahr 2020. ☐

4.3 Berechnen Sie, in welchem Kalenderjahr die Anzahl der Geburten in Deutschland erstmals den Wert  $650,0 \cdot 10^3$  unterschreiten wird. ☐

4.4 Ermitteln Sie für das oben angegebene  $k$  die prozentuale jährliche Abnahme der Anzahl der Geburten in Deutschland. ☒

5.0 Nach der Einnahme eines Medikaments kann man dessen Konzentration im Blut des Patienten messen. Für die ersten sechs Stunden nach der Einnahme beschreibt die Funktion  $g$  mit dem Funktionsterm  $g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0,5t}$  die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (in Stunden seit der Einnahme), wobei auf das Mitführen der Einheiten verzichtet wird. Nach sechs Stunden seit der Einnahme erfolgt der weitere Abbau des Medikaments dann linear. (Abitur 2012 All)

5.1 Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten und den Zeitpunkt, zu dem diese vorliegt. ☒

(Teilergebnisse:  $\frac{dg(t)}{dt} = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5t}$ ; maximale Konzentration  $\approx 7,36 \left(\frac{\text{mg}}{\text{l}}\right)$ )

5.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am schnellsten abgebaut wird. ☒

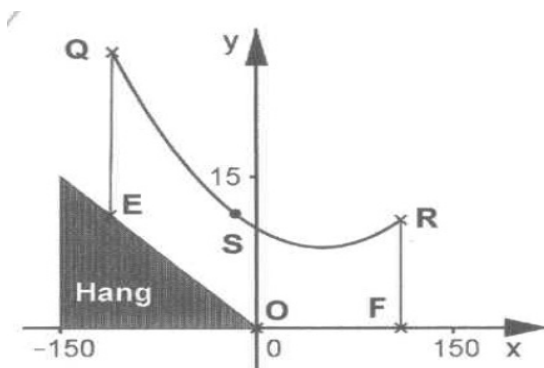
5.3 Der lineare Abbau nach sechs Stunden wird näherungsweise durch die Tangente  $s$  an den Graphen von  $g$  im Punkt  $P(6; g(6))$  beschrieben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente  $s$  und berechnen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist. ☒

5.4 Zeichnen Sie den Graph der Funktion  $k: t \mapsto k(t)$ , die die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten innerhalb der ersten 9 Stunden nach der Einnahme beschreibt. ☐

6.0 Der Verlauf einer Hochspannungsleitung zwischen den Punkten Q und R wird für

$$x \in [-110; 110] \text{ näherungsweise durch die Gleichung } y = 333 \cdot \left( e^{\frac{x-50}{666}} + e^{-\frac{x-50}{666}} \right) - 658$$

beschrieben. Der Hang wird in der Skizze durch die Gerade OE mit  $y = -0,1x$  begrenzt (siehe auch untenstehende Skizze). (Abitur 2014 All)



6.1 Berechnen Sie die Masthöhen  $\overline{EQ}$  und  $\overline{FR}$ . ☐

6.2 Berechnen Sie die Größe des Winkels  $\varphi$ , den die Hochspannungsleitung mit dem Mast im Punkt Q einschließt. ☐

(mögliches Teilergebnis:  $y'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x-50}{666}} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x-50}{666}}$ )

6.3 Der Punkt S ist derjenige Punkt der Leitung, der die geringste Entfernung vom Hang hat. Die Leitung hat dort die gleiche Steigung wie der Hang (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die x-Koordinate von S. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle. ☐

(Hinweis: Benutzen Sie die Substitution  $u = e^{\frac{x-50}{666}}$ )

7.0 Bei der Synthese eines Medikaments wird die Temperatur  $T(t)$  (in  $^{\circ}\text{C}$ ) während der Reaktionsdauer  $t$  (in Minuten) mit  $t \geq 0$  kontinuierlich gemessen.

Dabei gilt:  $T(t) = 10 \cdot (t \cdot e^{1-k \cdot t} + c)$  mit  $k, c \in \mathbb{R}$  und  $k \neq 0$ .

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird eine Temperatur von  $18^{\circ}\text{C}$  gemessen. Nach einer Reaktionsdauer von 8 Minuten beträgt die Temperatur  $47,43^{\circ}\text{C}$ . Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden. (Abitur 2015 AI)

7.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $c$  und  $k$ . ☐

Für die folgenden Teilaufgaben gilt:  $c = 1,8$  und  $k = 0,25$ .

7.2 Berechnen Sie das Temperaturmaximum während der Reaktion. ☐

(Mögliches Teilergebnis:  $\frac{d}{dt} T(t) = 10 \cdot e^{1-0,25t} - 2,5 \cdot t \cdot e^{1-0,25t}$ )

7.3 Um die Qualität des Endprodukts nicht zu gefährden, darf in der Abkühlphase die Temperaturabnahme in jeder Minute höchstens 4 °C betragen. Zeigen Sie, dass dies selbst im Augenblick der stärksten Abkühlung eingehalten wird. 

8.0 Um die Ausbreitung von Borkenkäfern in bayerischen Wäldern zu erforschen, wird der Befall eines ausgewählten Baumes über den Zeitraum von 12 Monaten untersucht. Die Anzahl der in diesem Baum befindlichen Borkenkäfer kann näherungsweise durch den Term  $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot (t^2 - 12t)}$  mit  $t, \lambda \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0, \lambda < 0$  beschrieben werden, wobei  $N_0$  die Anzahl der Borkenkäfer zu Beginn des Beobachtungszeitraums und  $t$  die Zeit in Monaten ab Beobachtungsbeginn ist.

Es ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach dem ersten Monat verdreifacht hat und nach einem weiteren Monat 133 Borkenkäfer gezählt wurden. Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden, sofern nicht anders gefordert. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2015 AII)

8.1 Bestimmen Sie  $\lambda$  und  $N_0$ . Runden Sie dabei  $N_0$  auf eine ganze Zahl. 

Für die folgenden Teilaufgaben gilt:  $\lambda = -0,10$  und  $N_0 = 18$ .

8.2 Ab einem Befall von 540 Borkenkäfern gilt der Baum als dauerhaft geschädigt. Berechnen Sie den Zeitpunkt  $t_0$ , zu dem diese Anzahl erstmalig erreicht wird. 

8.3 Bestimmen Sie den Zeitpunkt  $t_{\max}$ , zu dem der Befall des Baumes am größten ist. 

(Mögliches Teilergebnis:  $\dot{N}(t) = -3,6 \cdot e^{-0,10(t^2 - 12t)} \cdot (t - 6)$ )

8.4  $\ddot{N}$  besitzt nur die beiden einfachen Nullstellen  $t_{1/2} = 6 \mp \sqrt{5}$  (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Zeitpunkt  $t_v$ , zu dem sich die Borkenkäfer am stärksten vermehren. 

9.0 Seit Beginn des 20. Jahrhunderts führt der vom Menschen verursachte zusätzliche Ausstoß von Kohlendioxid ( $\text{CO}_2$ ) zu einer Verstärkung des Treibhauseffektes, das heißt zu einem globalen Temperaturanstieg mit weitreichenden Folgen.

Nach einem mathematischen Modell soll die Entwicklung der weltweiten  $\text{CO}_2$ -Emissionen abgeschätzt werden. Dieses Modell lässt sich näherungsweise durch die mathematische Funktion  $k: t \mapsto a \cdot t^2 \cdot e^{-bt} + 7$  mit  $t, a, b \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0, a > 0, b > 0$  darstellen.

Dabei entspricht  $k(t)$  der  $\text{CO}_2$ -Emissionsrate in Mrd. Tonnen pro Jahr zum Zeitpunkt  $t$ , wobei  $t$  die seit Beginn des Jahres 1950 vergangene Zeit in Jahren beschreibt. Unter der  $\text{CO}_2$ -Emissionsrate wird dabei im Folgenden die ausgestoßene Masse an  $\text{CO}_2$  pro Zeiteinheit verstanden. Auf das Mitführen von Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2016 AI)

9.1 Nach diesem Szenario lag die  $\text{CO}_2$ -Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2000 bei genau 30 Mrd. Tonnen pro Jahr und zu Beginn des Jahres 2200 wird sie genau bei 17,5 Mrd. Tonnen  $\text{CO}_2$  pro Jahr liegen. Bestimmen Sie mithilfe dieser Angaben die Parameter  $a$  und  $b$  der Funktion  $k$  auf drei Nachkommastellen. 

9.2.0 Im Folgenden gilt  $a = 0,025$  und  $b = 0,020$ .

Alle folgenden Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

9.2.1 Bestimmen Sie die nach diesem Modell prognostizierte  $\text{CO}_2$ -Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2017. 

9.2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt  $t_m$ , zu dem die absolut maximale  $\text{CO}_2$ -Emissionsrate zu erwarten ist. 

(mögliches Teilergebnis:  $\dot{k}(t) = 0,05 \cdot e^{-0,02t} \cdot (-0,01 \cdot t^2 + t)$ )

9.2.3 Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion  $k$  für  $0 \leq t \leq 250$  (die Jahre 1950 bis 2200) in ein kartesisches Koordinatensystem. 

Maßstab:  $t$ -Achse: 50 Jahre = 2 cm;  $k$ -Achse: 10 Mrd. Tonnen pro Jahr = 2 cm.

9.2.4 Ermitteln Sie rechnerisch, in welchem Jahr zwischen 1950 und heute der Zeitpunkt liegt, an dem die  $\text{CO}_2$ -Emissionsrate nach diesem Modell am meisten zugenommen hat. 

9.2.5 Die Funktion  $K: t \mapsto (-1,25 \cdot t^2 - 125 \cdot t - 6250) \cdot e^{-0,02t} + 7t$  mit  $t \geq 0$  und  $t \in \mathbb{R}$  ist

eine Stammfunktion von  $k$  (Nachweis nicht erforderlich).

Bestimmen Sie, wie viele Tonnen  $\text{CO}_2$  voraussichtlich im Jahr 2016 insgesamt ausgestoßen werden, wenn das obige Modell zugrunde gelegt wird. 

10.0 In einer Box werden Mehlwürmer als Futter für Schildkröten gezüchtet. Der Bestand der Mehlwürmer in dieser Box wird in Kilogramm [kg] angegeben und nach einem Modell durch die Funktion  $M: t \mapsto a \cdot e^{b \cdot t}$  mit  $t, a, b \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0, a > 0, b > 0$  beschrieben.

Dabei gibt  $t$  die Zeit in Tagen [d] ab Beobachtungsbeginn an.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  werden 0,8 kg Mehlwürmer in die Box eingesetzt. Exakt drei Tage später hat sich ihr Bestand um 2,79 kg vermehrt.

Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden. (Abitur 2016 All)

10.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $b$ . 

Für die folgenden Aufgaben gilt:  $a = 0,8$  und  $b = 0,5$ .

10.2 Berechnen Sie die mittlere Zuwachsrates des Mehlwürmerbestands in den ersten vier Tagen des Beobachtungszeitraums. 

10.3 Berechnen Sie den Bestand an Mehlwürmern, bei dem die momentane Zuwachsrates  $1,2 \frac{\text{kg}}{\text{d}}$  beträgt. 

11.0 Ein Tierarzt verabreicht einer Kuh ein Medikament, dessen Wirkstoff über das Blut auch in die Milch gelangt. Die Konzentration  $k$  des Medikaments in der Kuhmilch wird in  $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$  (Milligramm pro Liter) angegeben und kann näherungsweise durch

$$k: t \mapsto 5 \cdot t \cdot e^{\frac{1}{\lambda} \cdot t} \text{ mit } \lambda, t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0, \lambda < 0. \text{ (Abitur 2018 AI)}$$

Dabei gibt  $t$  die Zeit in Stunden ab dem Verabreichen des Medikaments an.

Ergebnisse sind gegebenenfalls auf drei Nachkommastellen zu runden.

Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

11.1 Bestimmen Sie  $\lambda$ , wenn die Konzentration des Medikaments in der Milch

105 Minuten nach dem Verabreichen  $4,88 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$  beträgt. 

11.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt:  $\lambda = -3$ .

11.2.1 Bestimmen Sie, nach welcher Zeit  $t_{\max}$  die Konzentration des Medikaments in der Milch der Kuh am größten ist. Geben Sie auch diese maximale Konzentration  $k_{\max}$  an. 

(Mögliches Teilergebnis:  $k(t) = \left(5 - \frac{5}{3}t\right) \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$ )

11.2.3 Überprüfen Sie, ob sich die Konzentration des Medikaments in der Milch im Laufe der Zeit vollständig abbaut. 

11.2.4 Die Funktion  $L: t \mapsto (-15t - 45) \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$  mit  $D_L = \mathbb{R}$  ist Stammfunktion der Funktion  $k$  in  $[0; \infty[$  (Nachweis nicht erforderlich).

Berechnen Sie die mittlere Konzentration des Medikaments in der Milch innerhalb der ersten acht Stunden nach Verabreichung des Medikaments. 

12.0 Ein Studio für Ernährungsberatung erstellt nach dem Motto „Abnehmen braucht Zeit“ für einen Kunden eine persönliche Gewichtskurve für die geplante Diät.

Die Funktion  $G$  mit  $G(t) = 20e^{-0,2t} + 70$  mit  $t \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0$  gibt näherungsweise das Gewicht in kg nach  $t$  Monaten an. Auf die Angabe von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.

12.1 Bestimmen Sie das Gewicht des Kunden zu Beginn der Diät und das Idealgewicht  $G_{\text{ideal}}$ , das der Kunde nach sehr langer Anwendung der Diät erreichen soll. 

12.2 Ermitteln Sie, nach welcher Dauer  $t_1$  der Diät der Kunde nach diesem Plan 75 % der angestrebten Gewichtsreduzierung erreichen wird. 

12.3 Die vorgeschlagenen Diät soll mit einer anderen Diät verglichen werden, bei der es angeblich möglich ist, die zu Beginn der Kur vorliegende Gewichtsabnahmerate  $\cdot G(0)$  konstant beizubehalten.

Bestimmen Sie die sich dann ergebende Zeitspanne  $t_2$ , nach der das angestrebte Idealgewicht erreicht würde. 

13.0 Für die Erprobung eines neuen Medikaments wird im Labor die Entwicklung einer Pilzkultur in einer Nährlösung unter dem Einfluss des Medikaments beobachtet. Man stellt fest, dass sich die Anzahl  $N$  der Pilze in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Stunden (h) durch die Funktion  $N$  mit  $N(t) = N_0 \cdot e^{3t-t^2}$  mit  $t \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0$  näherungsweise beschreiben lässt. Dabei bedeutet  $N_0$  die anfänglich vorhandene Anzahl an Pilzen. Für die Rechnungen kann auf die Verwendung von Benennungen verzichtet werden.

13.1 Die erste Zählung ergibt nach 30 Minuten 1745 Pilze.

Bestimmen Sie damit die Anfangszahl  $N_0$ . (Ergebnis:  $N_0 = 500$ )

Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die maximale Anzahl von Pilzen vorhanden ist und bestimmen Sie diese maximale Anzahl. 

13.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt  $t_1$ , an dem die Kultur am stärksten wächst und den Zeitpunkt  $t_2$ , an dem die Kultur am stärksten abnimmt und geben Sie die Bedeutung dieser beiden Zeitpunkte für den Graphen der Funktion  $N$  an. 

13.3 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Pilzkultur völlig abgestorben ist, das heißt weniger als ein Pilz vorhanden ist. 

13.4 Skizzieren Sie den Graphen von  $N$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: 1 cm = 0,5 h; 1 cm = 1000 Pilze) 



- 14.0 Durch starke Überfischung war der Fischbestand des Gelbflossenthuns im Südostatlantik stark gefährdet, worauf Verhandlungen über Schutzmaßnahmen aufgenommen wurden. Auf der Basis von Messungen der Fischpopulation wurde das folgende mathematische Modell entwickelt. Für den Bestand  $B$  (in Millionen Fischen) zum Zeitpunkt  $t$  (in Jahren) gilt:
- $$B(t) = (-15t + 5) \cdot e^{-0,15t} + 70 \text{ mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0.$$
- Die Zeit  $t$  wurde auf den 1.1.1995 bezogen. Auf Einheiten wird bei der Rechnung verzichtet. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.
- 14.1 Zeigen Sie, dass der Fischbestand am 1.1.2002 mit 35 Millionen Fischen seinen minimalen Bestand erreicht hat. 
- 14.2 Berechnen Sie den Bestand des Gelbflossenthuns am 1.1.1995, bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion  $B$  für  $t \rightarrow \infty$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. 
- 14.3 Berechnen Sie den Bestand am 1.7.2011 und die momentane jährliche Zunahme, die das Modell zu diesem Zeitpunkt liefert. 
- 14.4 Zeigen Sie, dass es nach diesem Modell einen Zeitpunkt größter Bestandszunahme gab und berechnen Sie, in welchem Jahr dies der Fall war. 
- 15.0 Der Verlauf der Anzahl der Neuerkrankungen für eine bestimmte Grippewelle in einer gewissen Region in Abhängigkeit von der Zeit kann vereinfacht durch die Funktion  $N$  mit der Funktionsgleichung  $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,5t}$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben werden. Dabei bedeutet die Variable  $t$  die Zeit in Wochen ab Beginn der Grippewelle zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$ . Der Funktionswert  $N(t)$  gibt die Anzahl der an Grippe neu erkrankten Menschen in Tausend an. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2019 Teil 2 AI)
- 15.1 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt  $t_{\max}$  die Zahl der neu erkrankten Menschen ihr Maximum annimmt und berechnen Sie diese maximale Anzahl. 
- (Teilergebnis:  $\dot{N}(t) = (4t - t^2) \cdot e^{-0,5t}$ )
- 15.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte  $N(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. 
- 15.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion  $N$  im Bereich  $0 \leq t \leq 10$  in ein geeignetes beschriftetes Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. 

15.4 Gegeben ist die Funktion  $G: t \mapsto (-4t^2 - 16t - 32) \cdot e^{-0,5t}$  mit der Definitionsmenge

$D_G = \mathbb{R}_0^+$ . Zeigen Sie, dass die Funktion  $G$  eine mögliche Stammfunktion von  $N$  ist.

Berechnen Sie damit die durchschnittliche Anzahl an neu erkrankten Menschen während der ersten acht Wochen ab Beginn der Grippewelle. 

16.0 Der Bestand einer Bakterienkultur, der kontinuierlich Gift zugeführt wird, kann in den ersten fünf Stunden näherungsweise durch eine Funktion des folgenden Typs

beschrieben werden:  $k: t \mapsto 50t \cdot e^{-at} + 10$  mit  $t \in [0; 5]$ .

Dabei gibt  $t$  die seit Beginn der Giftzugabe zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  vergangene Zeit in

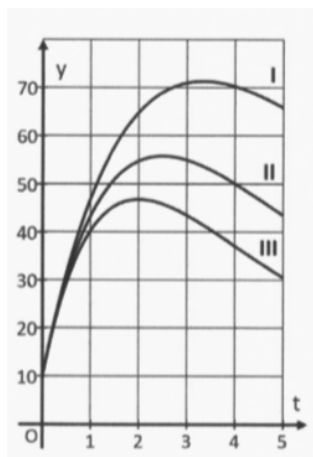
Stunden an. Der Funktionswert  $k(t)$  gibt die Anzahl der Bakterien in Tausend an.

Je nach Wirksamkeit des Gifts ist  $a$  eine dem Gift entsprechende positive reelle Zahl.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Untenstehende Abbildung zeigt drei Ausschnitte von Graphen der Funktion  $k$  für verschiedene Werte für  $a$ . (Abitur 2019 Teil 2 All)



Graph I gilt für  $a_1 = 0,3$  mit  $k_I(t) = 50t \cdot e^{-0,3t} + 10$

Graph II gilt für  $0,3 < a_2 < 0,5$  mit  $k_{II}(t) = 50t \cdot e^{-a_2 t} + 10$

Graph III gilt für  $a_3 = 0,5$  mit  $k_{III}(t) = 50t \cdot e^{-0,5t} + 10$

16.1 Berechnen Sie für  $t_1 = 0$  und  $t_2 = 2$  den Quotienten  $\frac{k_{III}(t_2) - k_{III}(t_1)}{t_2 - t_1}$  und interpretieren Sie

das Ergebnis im Sachzusammenhang. 

16.2 Überprüfen Sie bei der Funktion  $k_{III}$  rechnerisch, ob vier Stunden nach Beginn der

Giftzugabe die momentane Abnahmerate der Anzahl der Bakterien ca. 113 Bakterien pro Minute beträgt. 

16.3 Entnehmen Sie der Abbildung ein geeignetes Wertepaar von Graph II und berechnen Sie damit den Wert  $a_2$  für den Funktionsterm  $k_{II}(t)$ . Folgern Sie aus den Angaben und dem berechneten Wert für  $a_2$ , wie die Größe von  $a$  mit der Wirksamkeit des Gifts zusammenhängt. 

17.0 Der Tierpark Affenhaus öffnet jeden Tag um 10 Uhr und schließt um 18 Uhr.  
Die Besucherzahlen des Tierparks in Tausend können laut einem Modell

näherungsweise durch die Funktion  $N$  mit der Funktionsgleichung  $N(t) = \frac{1}{4}(8t - t^2)e^{0,4t-1}$

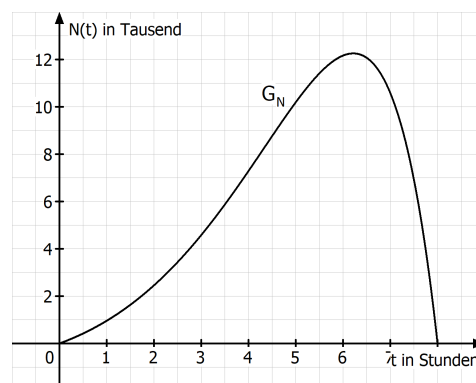
mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben werden. Dabei gibt  $t$  die vergangene Zeit in Stunden seit Öffnung des Tierparks an einem bestimmten Tag an (Zeitpunkt der Öffnung des Tierparks:  $t_0 = 0$ ).

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.  
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)

17.1 Der Betreiber des Tierparks möchte die Korrektheit dieses Modells überprüfen.  
Dazu wird unter anderem um 12 Uhr die tatsächliche Anzahl der Besucher im Tierpark bestimmt. Wenn dieser Wert innerhalb einer Abweichung von 10 % um den mit dem Modell errechneten Wert liegt, wird das Modell punktuell als korrekt angesehen.  
Bestimmen Sie das Intervall, in dem die tatsächliche Besucherzahl um 12 Uhr liegen muss, damit die Prüfung zu dieser Uhrzeit positiv ausfällt. 

17.2.0 Im Folgenden wird das Modell als korrekt betrachtet.

In der Abbildung sehen Sie den Verlauf der Besucherzahlen nach dem Modell über die Zeit nach der Öffnung des Tierparks graphisch dargestellt.



17.2.1 Das Betreiben der Eisdiele „Pinguin“ ist nur rentabel, wenn sich mindestens 4000 Personen im Tierpark befinden. Ermitteln Sie anhand der Abbildung näherungsweise die Tageszeiten, zu denen die Eisdiele rentabel ist. 

17.2.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt nach der Öffnung des Tierparks, an dem sich die meisten Besucher im Zoo befinden und berechnen Sie diese höchste Anzahl. 

(Mögliches Teilergebnis:  $\dot{N}(t) = \frac{1}{10}(-t^2 + 3t + 20) \cdot e^{0,4t-1}$ )

18.0 In einem Wald in den bayerischen Voralpen wurde der Holzbestand in den letzten Jahren kontinuierlich untersucht. Die erste Bestandaufnahme erfolgte am 01.01.1960, also zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  und kann mithilfe folgender Funktion gut modelliert werden:

$w: t \mapsto w(t) = 0,1 \cdot t^2 \cdot e^{-0,06t} + 10$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Dabei gibt  $t$  die Jahre seit Messbeginn und der Wert  $w(t)$  den Holzbestand in 10000 m<sup>3</sup> an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie bei den folgenden Teilaufgaben die Ergebnisse sinnvoll.

(Abitur 2020 Nachtermin Teil 2)

18.1 Berechnen Sie den Holzbestand in m<sup>3</sup> für den 01.01.2000. ☐

18.2 Berechnen Sie  $\dot{w}(10)$  und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. ☒

(Mögliches Zwischenergebnis:  $\dot{w}(t) = e^{-0,06t} (0,2t - 0,006t^2)$ )

18.3 Bestimmen Sie den durchschnittlichen Holzzuwachs in m<sup>3</sup> pro Jahr im Zeitraum vom 01.01.1971 bis 01.01.1980. ☐

18.4 Berechnen Sie, innerhalb welchen Jahres der Holzbestand am größten war. ☒

19.0 Der zeitliche Verlauf der Temperatur eines in einer großen Tasse eingeschenkten Frühstückstees wird in einem Schülerexperiment untersucht. Als Grundlage wird näherungsweise die Modellfunktion  $T$  mit der Funktionsgleichung  $T(t) = a \cdot e^{bt} + 22$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  und  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  verwendet. Dabei steht die Variable  $t$  für die Beobachtungszeit  $t$  in Minuten ab dem Beginn des Experiments, welches mit dem Eingießen des Tees in die Tasse zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  startet. Der jeweilige Funktionswert von  $T$  gibt die Temperatur des Tees in °C zum Zeitpunkt  $t$  an. Der Tee in der Tasse hat zu Beginn des Experiments um 8:55 Uhr eine Temperatur von 80 °C. Um 9:15 Uhr beträgt die Teetemperatur nur noch 30 °C. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2021 AI)

19.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $b$ . Runden Sie gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Wert 22 im Funktionsterm der Funktion  $T$  für die Funktionswerte der Modellfunktion hat und bringen Sie diesen Wert in Zusammenhang mit dem durchgeführten Experiment. ☒

Für die folgende Teilaufgabe gilt:  $a = 58$ ;  $b = -0,1$

19.2 Als angenehm wird eine Trinktemperatur von 54 °C empfunden. Berechnen Sie, um welche Uhrzeit diese Trinktemperatur erreicht wird. Runden Sie die Zeitangabe auf ganze Minuten. ☐

20.0 90% einer Rasenfläche sind vermoost. Das Moos soll mit einem umweltverträglichen Mittel zurückgedrängt werden. Die zeitliche Entwicklung der vom Moos bedeckten Rasenfläche wird näherungsweise mittels der Modellfunktion  $M$  mit der Funktionsgleichung  $M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  und  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  beschrieben. Dabei steht die Variable  $t$  für die Zeit in Tagen ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 0$  der Ausbringung des Mittels. Der jeweilige Funktionswert von  $M$  gibt die gesamte mit Moos bedeckte Fläche in  $\text{m}^2$  zum Zeitpunkt  $t$  an. Bekannt ist, dass zwei Tage nach der Ausbringung des Mittels noch  $400 \text{ m}^2$  und nach neun Tagen nur noch  $140 \text{ m}^2$  vermoost sind. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2021 All)

20.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $b$ . Runden Sie  $a$  ganzzahlig und  $b$  auf zwei Nachkommastellen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Rasenfläche. 

Für die folgende Teilaufgabe gilt:  $a = 540$ ;  $b = -0,15$

20.2 Der Hersteller des umweltverträglichen Mittels wirbt damit, dass die mit Moos bedeckte Fläche nach der Ausbringung innerhalb einer Woche um ca. 65 % zurückgehen wird. Überprüfen Sie diese Werbeaussage, indem Sie berechnen, nach wie vielen Tagen diese Reduzierung laut dem Modell aus 20.0 erreicht wird. Runden Sie auf ganze Tage. 

21.0 In einem Labor wird eine für Forschungszwecke tiefgekühlte Substanz zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  der Tiefkühltruhe entnommen und bei Zimmertemperatur aufgetaut. Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass sich dabei die Temperatur der Substanz näherungsweise durch die Modellfunktion  $T$  mit der Funktionsgleichung  $T(t) = -34 \cdot e^{-0,015 \cdot t} + 24$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschreiben lässt. Dabei steht die Variable  $t$  für die Beobachtungszeit  $t$  in Minuten ab dem Beginn des Auftauprozesses. Der jeweilige Funktionswert von  $T$  gibt die Temperatur der Substanz in  $^\circ\text{C}$  zum Zeitpunkt  $t$  an.

21.1 Geben Sie die Temperatur der Substanz zum Zeitpunkt  $t_0$  und die Zimmertemperatur an. 

21.2 Die Substanz kann ab einer Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  für Laboruntersuchungen verwendet werden. Berechnen Sie, um welche Uhrzeit mit den Untersuchungen begonnen werden kann, wenn die Substanz um 7:00 Uhr der Tiefkühltruhe entnommen wurde. Runden Sie Ihre Zeitangabe auf ganze Minuten. 

22.0 Eine Konditorei verwendet für die Kuchendekoration einen Airbrush-Kompressor. Dessen Druckbehälter ist für einen maximalen Überdruck von 6,5 bar ausgelegt. er hat eine undichte Stelle, so dass Luft ausströmt und somit der Überdruck mit der Zeit abnimmt. Nach vollständiger Komprimierung der Luft zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  kann der Überdruck im Druckbehälter in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  näherungsweise durch die Modellfunktion  $p$  mit der Funktionsgleichung  $p(t) = p_0 \cdot e^{k \cdot t}$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , sowie  $p_0 > 0$  und  $k \in \mathbb{R}$  beschrieben werden. Der jeweilige Funktionswert von  $p$  gibt den Überdruck im Druckbehälter (gemessen in der Einheit bar) zum Zeitpunkt  $t$  (gemessen in Minuten) an.

22.1 Nachdem der Airbrush-Kompressor die Luft bis zum maximalen Überdruck verdichtet hat ( $t_0 = 0$ ), wird zwei Minuten später am Gerät angezeigt, dass noch ein Überdruck von 6,0 bar im Druckbehälter herrscht.

Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Werte für die Parameter  $p_0$  und  $k$ .

Runden Sie den Wert für  $k$  auf zwei Nachkommastellen. 

(Teilergebnis:  $k \approx -0,04$ )

22.2 Nun sei  $p_0 = 6,5$  und  $k = -0,04$ . Für den Fall, dass der Überdruck im Druckbehälter um mehr als 90 % des Anfangsdruckes abgesunken ist, schaltet sich der Kompressor automatisch ein und verdichtet wieder bis zum maximalen Überdruck. Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten der Kompressor mit dem erneuten Verdichten beginnt. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Minuten. 

23 Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer

Bakterienpopulation im Labor durch  $B: t \mapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Dabei steht

die Variable  $t$  für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und  $B(t)$  für die Bakterienanzahl in einer Petrischale.

Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik,

deren Lösung auf die Gleichung  $0,4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$  führt, und lösen Sie die Gleichung nach  $t_1$

auf. 

24.0 Während das Bundesamt für Naturschutz seit 20 Jahren die Ausbreitung von Wölfen in Deutschland fördert, fordern u.a. Weidetierhalter und Jäger zunehmend eine Aufhebung des Abschussverbots von Wölfen. Um über die eventuelle Aufhebung dieses Verbots zu entscheiden, soll die Entwicklung der Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland modelliert werden. Die Entwicklung seit dem Jahr 2008 lässt sich näherungsweise durch die Funktion  $N$  mit der Funktionsgleichung  $N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t}$  mit  $t, N_0, c \in \mathbb{R}$

und  $t \geq 0, N_0 > 0, c > 0$  darstellen. Der Funktionswert von  $N$  gibt die Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland zum Zeitpunkt  $t$  an. Dabei steht  $t$  für die seit Ende des Jahres 2008 ( $t_0 = 0$ ) vergangene Zeit in Jahren. Ende des Jahres 2013 wurden 18 Wolfsrudel in Deutschland gezählt. Ende 2017 lag die Zahl der Wolfsrudel bereits bei 60. (Abitur 2022 AI)

24.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $N_0$  und  $c$  der Funktion  $N$ . Runden Sie  $N_0$  ganzzahlig und  $c$  auf drei Nachkommastellen. 

24.2.0 Im Folgenden gilt  $N(t) = 4 \cdot e^{0,301 \cdot t}$ .

24.2.1 Das Bundesamt für Naturschutz geht davon aus, dass Deutschland maximal Lebensraum für 440 Rudel bieten kann. Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Wolfsrudel laut dem Modell aus 24.0 voraussichtlich diesen Wert erreicht. 

24.2.2 Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $N$  in der Form  $N(t) = N_0 \cdot b^t$  ( $b > 0$ ) an und folgern Sie daraus die prozentuale Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel pro Jahr. Runden Sie  $b$  auf drei Nachkommastellen. 

25.0 Landwirte beklagen zunehmend Ernteauffälle durch anhaltende Dürren in den Sommermonaten. Während der durchschnittliche Ertrag an Weizen pro Hektar Anbaufläche 2014 noch bei 86,3 Dezitonnen lag, brachte die Ernte von 2017 nur noch durchschnittlich 70,0 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche ein.

Basierend auf den seit dem Jahr 2014 ausgewerteten Daten kann die Ertragsentwicklung vereinfacht durch die Funktion

$E: x \mapsto 56,3 \cdot e^{-c \cdot t} + a$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+, c \in \mathbb{R}^-$  und  $a \in \mathbb{R}^+$  modelliert werden. Der Funktionswert von  $E$  gibt den durchschnittlichen Weizenertrag in Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zum Zeitpunkt  $t$  an. Dabei steht  $t$  für die vergangene Zeit in Jahren ab dem Jahr 2014 ( $t_0 = 0$ ). Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2022 AI)

25.1 Ermitteln Sie den Mittelwert der jährlichen Abnahme des durchschnittlichen Weizenertrags pro Hektar Anbaufläche über die Jahre 2014 bis 2017. 

25.2 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $c$  der Funktion  $E$ . Runden Sie  $c$  auf zwei Nachkommastellen. 

25.3.0 Im Folgenden gilt:  $E(t) = 56,3 \cdot e^{-0,11t} + 30$

25.3.1 Einige Landwirte sind der Meinung, dass der Weizenanbau ab einem durchschnittlichen Weizenenertrag von 50 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche nicht mehr rentabel für die ist. Berechnen Sie, ab welchem Jahr dies laut dem Modell der Fall wäre. ○

25.3.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von  $E$  für  $t \rightarrow \infty$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. ⓧ

25.3.3 Sofern Landwirte 2018 mit einem massiven Einbruch ihrer Weizenenerträge konfrontiert waren, hatten sie Anspruch auf Unterstützungszahlungen des Bundes. War ihr durchschnittlicher Weizenenertrag pro Hektar Anbaufläche um mehr als 30 % geringer als der Mittelwert der entsprechenden Erträge in den Jahren 2015, 2016 und 2017, so konnten sie einen Antrag auf Nothilfen stellen.  
Prüfen Sie rechnerisch, ob sich gemäß dem hier gewählten mathematischen Modell eine Antragsberechtigung für Nothilfen ergibt. ⓧ

26.0 Ein zu Beginn (Zeitpunkt  $t_0 = 0$ )  $0,5 \text{ m}^2$  großer Algenteppich, der sich am Boden des Beckens mit der Grundfläche  $A_0 = 188,69 \text{ m}^2$  gebildet hat, verdoppelt seine Fläche täglich. (Abitur 2023 AI)

26.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion  $A: t \mapsto A(t)$  auf, welche die Fläche des Algenteppichs in Quadratmetern in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Tagen angibt.  
Für die Definitionsmenge der Funktion  $A$  gilt  $D_A = [0; 8]$ . ⓧ

26.2 Zeigen Sie, dass sich die Wachstumsfunktion  $A$  näherungsweise durch die

Funktionsgleichung  $\tilde{A}(t) = 0,5 \cdot e^{0,6931 \cdot t}$  mit  $D_{\tilde{A}} = D_A$  darstellen lässt und berechnen Sie

damit, nach wie vielen Tagen zwei Drittel der gesamten Grundfläche des Beckens von Algen bedeckt wären, wenn nicht eingegriffen würde. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Tage. ⓧ



- 27.0 Beim Aufladen des Akkus eines Smartphones fließt ein Ladestrom von 2000 Milliampere. Sobald der Akku optimal geladen ist, verringert das Ladegerät den Ladestrom, um eine Überladung zu vermeiden.

Die Funktion  $I$  mit  $I(t) = 2000 \cdot 0,5^{\frac{t}{488}}$  und  $t \in D_I \subset \mathbb{R}$  modelliert den Verlauf des Ladestroms ab dem Erreichen der optimalen Akkuladung zur Zeit  $t = 0$  bis zur endgültigen Abschaltung des Ladegeräts zur Zeit  $t_{\text{end}} > 0$ . Die Funktionswerte von  $I$  entsprechen der Stärke des Ladestroms in Milliampere und  $t$  entspricht der Zeit in Minuten. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2023 All)

- 27.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm näherungsweise auch in der Form

$$\tilde{I}(t) = 2000 \cdot e^{-0,142t}$$
 schreiben lässt. ☒

- 27.2 Das Ladegerät schaltet sich komplett ab, wenn die Ladestromstärke auf 100 Milliampere abgesunken ist. Ermitteln Sie  $t_{\text{end}}$  unter Verwendung des Funktionsterms aus 27.1. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Minuten und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für  $\tilde{I}$  an. ☐

- 28.0 In sogenannten Aluminiumhütten wird nach einem bestimmten Verfahren Aluminium aus Aluminiumoxid gewonnen. Die Temperatur vom Ausgangsstoff bis zum fertigen Endprodukt Aluminium während des Herstellungsprozesses kann modellhaft durch die Funktion  $T$  mit der Funktionsgleichung  $T(t) = 250 \cdot t \cdot e^{-0,1t} + 22$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben werden. Dabei steht die Variable  $t$  für die Zeit in Minuten ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 0$ . Der Funktionswert von  $T$  gibt die Temperatur in Grad Celsius zum Zeitpunkt  $t$  an. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2024 AI)

- 28.1 Berechnen Sie die Temperatur im Herstellungsprozess nach fünf Minuten und die Temperatur, welche sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt. ☒

- 28.2 Beim Erreichen des Temperaturmaximums liegt Aluminium in flüssiger Form vor. Es wird mittels eines Saugrohrs abgesaugt und kühlt anschließend ab. Ermitteln Sie rechnerisch dieses Temperaturmaximum. ☒

(mögliches Teilergebnis:  $\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0,1t} - 25 \cdot t \cdot e^{-0,1t}$ )

- 28.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion  $T$  im Bereich  $0 \leq t \leq 60$  in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. Entnehmen Sie anschließend dem Graphen den Zeitpunkt  $t_{20\text{-fach}}$ , zu dem die Temperatur im Abkühlvorgang dem 20-fachen der Anfangstemperatur entspricht. ☐

28.4 Für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion  $T$  gilt ohne Nachweis

$W(20|T(20))$ . Berechnen Sie  $\dot{T}(20)$  und interpretieren Sie den Wert im Sinne der vorliegenden Thematik. 

29.0 Beim Backen eines Roggenbrottes kann Sauerteig als Triebmittel für den Brotteig verwendet werden. Für den Sauerteig setzt man Mahl und Wasser im selben Verhältnis zueinander an. Milchsäurebakterien in Mehl und Wasser sorgen dafür, dass im Gemisch die notwendige Milchsäure entsteht.

Ein frisch angesetzter Sauerteig besitzt zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  einen pH-Wert (Säuregrad) von 6,0. Nach 40 Stunden hat der Sauerteig einen pH-Wert von 3,5.

Das Durchsäuern des Gemisches lässt sich näherungsweise durch die Funktion  $p$  mit der Funktionsgleichung  $p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot t}$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  und  $b, k \in \mathbb{R}$  beschreiben.

Dabei steht die Variable  $t$  für die Zeit in Stunden ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 0$ .

Der Funktionswert von  $p$  gibt den pH-Wert zum Zeitpunkt  $t$  an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2024 AI)

29.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $b$  und  $k$ . 

29.2.0 Im Folgenden gilt  $p(t) = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056t}$ .

29.2.1 Der Sauerteig kann ab einem pH-Wert von 4,0 dem Brotteig zugegeben werden. Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, ab welchem die Zugabe des Sauerteigs möglich ist. Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit des pH-Wertes zu diesem

Zeitpunkt. (mögliches Teilergebnis:  $\dot{p}(t) = -0,1568 \cdot e^{-0,056t}$ ) 

29.2.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion  $p$  im Bereich  $0 \leq t \leq 60$  in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. 

30.0 Die Population eines bestimmten Bienenvolkes von Beginn des Monats März bis Ende Oktober kann näherungsweise durch die Funktion  $N$  mit der Funktionsgleichung  $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,125t-0,2} + 5$  mit  $t \in [0; 35]$  modelliert werden. Ab Ende Oktober verändert sich die Anzahl der Bienen in diesem Volk nach anderen Gesetzmäßigkeiten und soll im Folgenden nicht weiter betrachtet werden. Die Variable  $t$  im Funktionsterm steht für die seit Beobachtungsbeginn Anfang März ( $t_0 = 0$ ) vergangene Zeit in Wochen. Der Funktionswert von  $N$  gibt die Anzahl der Bienen in Tausend zum Zeitpunkt  $t$  an. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2025 AI)

30.1 Geben Sie die Anzahl der Bienen zu Beobachtungsbeginn an und berechnen Sie, wie viele Bienen das Volk fünf Wochen nach Beobachtungsbeginn zählt. 

30.2 Ermitteln Sie, nach wie vielen Wochen die Anzahl der Bienen im Beobachtungszeitraum das absolute Maximum erreicht hat und berechnen Sie diese maximale Bienenanzahl. 

(mögliches Teilergebnis:  $\dot{N}(t) = e^{-0,125t-0,2}(-0,25t^2 + 4t)$ )

30.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion N im angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Graphen nachvollziehbar den Monat, in welchem die Anzahl der Bienen im Volk erstmals 50000 beträgt.   
Maßstab: 4 Wochen = 1 cm; 10000 Bienen = 1 cm

30.4 An der Stelle  $t_w \approx 4,7$  ändert der Graph der Funktion N sein Krümmungsverhalten von einer Links- in eine Rechtskrümmung. Weiterhin gilt  $\dot{N}(t_w) \approx 6,04$ . Interpretieren Sie die beiden Werte im Sachzusammenhang. 

31.0 Die Körpertemperatur einer an einem grippalen Infekt erkrankten Person kann vereinfacht durch die Modellfunktion T mit der Funktionsgleichung  $T(t) = 36,5 + 2t \cdot e^{-0,25t}$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben werden. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab Auftreten der ersten Symptome zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  und T(t) für die Körpertemperatur in °C zum Zeitpunkt t.  
Auf das Mitführen von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle. (Abitur 2025 All)

31.1 Untersuchen Sie, welche Temperatur sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt. 

31.2 Ermitteln Sie rechnerisch, welche maximale Körpertemperatur die erkrankte Person nach diesem Modell erreicht. 

(mögliches Teilergebnis:  $\dot{T}(t) = 2 \cdot e^{-0,25t}(1 - 0,25t)$ )

## Lösungen

1.1

$$W(3,5 \cdot 360) = \frac{1}{2} \cdot W_0 \Rightarrow W_0 \cdot e^{k \cdot 3,5 \cdot 360} = \frac{1}{2} \cdot W_0 \Rightarrow e^{k \cdot 3,5 \cdot 360} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3,5 \cdot 360 \cdot k = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{3,5 \cdot 360} = -\frac{\ln 2}{1260}$$

1.2

$$W(t_E) = W_0 \cdot e^{k \cdot t_E} \Rightarrow e^{k \cdot t_E} = \frac{W(t_E)}{W_0} \Rightarrow k \cdot t_E = \ln \frac{W(t_E)}{W_0}$$

$$\Rightarrow t_E = \frac{\ln \frac{W(t_E)}{W_0}}{k} = \frac{\ln \frac{1500}{35000}}{-\frac{\ln 2}{1260}} \approx 5726 \text{ (Tage)}$$

1.3

$$\frac{dW(t)}{dt} = W_0 \cdot e^{k \cdot t} \cdot k$$

$$\lim_{\substack{> \\ t \rightarrow 0}} (35000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1260} t} \cdot (-\frac{\ln 2}{1260})) = -19,25$$

$$\lim_{\substack{< \\ t \rightarrow t_E}} (35000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1260} t_E} \cdot (-\frac{\ln 2}{1260})) = -0,83$$

$$\frac{dW(t)}{dt} \text{ ist die Wertänderung pro Zeiteinheit}$$

$\Rightarrow$  der tägliche Wertverlust des Autos beträgt anfänglich etwa 19,25 DM  
und zum Zeitpunkt  $t_E$  beträgt der tägliche Wertverlust etwa 0,83 DM;

2.1

$$v(0) = 15 \cdot (1 - e^{-0,654 \cdot 0}) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (15 \cdot (1 - e^{-0,654 t})) = 15$$

Die Maßzahl der Geschwindigkeit nähert sich für große Werte  $t$  dem Wert 15 asymptotisch an.

2.2

$$v(t) = 9 \Rightarrow 15 \cdot (1 - e^{-0,654 t}) = 9 \Rightarrow 1 - e^{-0,654 t} = \frac{3}{5} \Rightarrow e^{-0,654 t} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow -0,654 \cdot t = \ln \frac{2}{5} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{2}{5}}{-0,654} \approx 1,40$$

2.3

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 15 \cdot e^{-0,654t} \cdot (-0,654) = 9,81 \cdot e^{-0,654t}$$

$$a(0) = 9,81 \cdot e^{-0,654 \cdot 0} = 9,81 \quad a(1,4) = 9,81 \cdot e^{-0,654 \cdot 1,4} \approx 3,9$$

2.4

$$\Delta s = \int_0^{t_1} v(t) dt = \int_0^{1,4} [15 \cdot (1 - e^{-0,654t})] dt = 15 \cdot \left[ t - \frac{1}{-0,654} \cdot e^{-0,654t} \right]_0^{1,4} =$$

$$15 \cdot \left[ \left( 1,4 - \frac{1}{-0,654} \cdot e^{-0,654 \cdot 1,4} \right) - \left( 0 - \frac{1}{-0,654} \cdot e^{-0,654 \cdot 0} \right) \right] \approx 7,2$$

3.1

$$N(1) = 15 \cdot e^{-0,1 \cdot (1-8)^2} \approx 0,112 \text{ (112 Erkrankte)}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 0,112 = 15 \cdot e^{-0,1 \cdot (t-8)^2} \Rightarrow 15 \cdot e^{-0,1 \cdot (t-8)^2} = 0,336 \Rightarrow e^{-0,1 \cdot (t-8)^2} = 0,0224$$

$$\Rightarrow -0,1 \cdot (t-8)^2 = \ln 0,0224 \Rightarrow (t-8)^2 = \frac{\ln 0,0224}{-0,1} = 37,99$$

$$\Rightarrow t-8 = \pm 6,16 \Rightarrow (t_1 = 14,16) \quad t_2 = 1,84$$

$\Rightarrow$  die Zeitspanne beträgt 0,84 Wochen;

### 3.2

Ausbreitungsgeschwindigkeit:  $\dot{N}(t)$

Maximum der Ausbreitungsgeschwindigkeit:  $\ddot{N}(t) = 0$

$$\dot{N}(t) = 15 \cdot e^{-0,1(t-8)^2} \cdot (-0,1 \cdot 2(t-8)) = -3e^{-0,1(t-8)^2} \cdot (t-8)$$

$$\ddot{N}(t) = -3 \cdot \left[ e^{-0,1(t-8)^2} \cdot (-0,2 \cdot (t-8)) \cdot (t-8) + e^{-0,1(t-8)^2} \right] =$$

$$-3 \cdot e^{-0,1(t-8)^2} \cdot [-0,2 \cdot (t-8) \cdot (t-8) + 1] = -3 \cdot e^{-0,1(t-8)^2} \cdot [-0,2 \cdot (t-8)^2 + 1]$$

$$\Rightarrow -0,2 \cdot (t-8)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (t-8)^2 = 5 \Rightarrow t-8 = \pm\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 10,24 \quad t_2 \approx 5,76$$

Vorzeichenuntersuchung von  $\ddot{N}(t)$ :  $-3 \cdot e^{-0,1(t-8)^2}$  für alle  $t \in D$  negativ

Skizze von  $-0,2 \cdot (t-8)^2 + 1$ :

$0 < t < 5,76 : \ddot{N}(t) > 0 \Rightarrow$  Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt zu

$5,76 < t < 10,24 : \ddot{N}(t) < 0 \Rightarrow$  Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt ab

$t > 10,24 : \ddot{N}(t) > 0 \Rightarrow$  Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt zu

$\Rightarrow$  bei  $t=5,76$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit am stärksten

$$\dot{N}(5,76) = -3e^{-0,1(5,76-8)^2} \cdot (5,76-8) \approx 4,069$$

$\Rightarrow 4069$  Neuerkrankungen pro Woche  $\Rightarrow 581$  Neuerkrankungen pro Tag

### 3.3

$$\dot{N}(t) = -3e^{-0,1(t-8)^2} \cdot (t-8) = 0 \Rightarrow t-8=0 \Rightarrow t=8$$

$$\ddot{N}(8) = -3e^{-0,1(8-8)^2} \cdot [-0,2 \cdot (8-8)^2 + 1] = -3 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$N(8) = 15 \cdot e^{-0,1(8-8)^2} = 15 \Rightarrow \text{HP}(8/15)$$

Zum Zeitpunkt 8 Wochen ist die Zahl der Erkrankten am größten, nämlich 15000.

### 3.4

$$N(0) = 15 \cdot e^{-0,1(0-8)^2} = 15 \cdot e^{-6,4} \approx 0,025$$

$$\Rightarrow 15 \cdot e^{-0,1(t-8)^2} = 0,025 \Rightarrow e^{-0,1(t-8)^2} = 0,0017 \Rightarrow -0,1 \cdot (t-8)^2 = \ln 0,0017$$

$$\Rightarrow (t-8)^2 = \frac{\ln 0,0017}{-0,1} \approx 63,77 \Rightarrow t-8 = \pm 8 \Rightarrow (t_1 = 0) \quad t_2 = 16$$

$\Rightarrow$  Die Epidemie ist nach 16 Wochen vorüber;

#### 4.1

$$G(t) = G_0 \cdot e^{k \cdot t} \quad t \in \mathbb{R} \wedge t > 0; \quad G_0 \in \mathbb{R} \wedge G_0 > 0; k \in \mathbb{R}$$

$k > 0$ : Wachstumsprozess

$k < 0$ : Abnahmeprozess

#### 4.2

$$G(17) = 709,4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,01213 \cdot 17} \approx 577,2 \cdot 10^3$$

#### 4.3

$$709,4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,01213 \cdot t_1} = 650 \cdot 10^3 \Rightarrow e^{-0,01213 \cdot t_1} = 0,91627 \Rightarrow -0,01213 \cdot t_1 = \ln 0,91627$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\ln 0,91627}{-0,01213} \approx 7,21 \Rightarrow t_1 = 8 \text{ (da } t \in \mathbb{N})$$

Im Jahr 2011 wird die Anzahl der Geburten in Deutschland erstmals den Wert  $650 \cdot 10^3$  unterschreiten

#### 4.4

Beliebiges Jahr:  $709,4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,01213 \cdot t_2}$

Folgejahr:  $709,4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,01213 \cdot (t_2+1)}$

$$\frac{709,4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,01213 \cdot (t_2+1)}}{709,4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,01213 \cdot t_2}} = \frac{e^{-0,01213}}{1} = 0,9879$$

Die prozentuale jährliche Abnahme der Geburten in Deutschland beträgt 1,2%.

#### 5.1

$$\bullet$$

$$g(t) = 10t \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) + 10e^{-0,5t} = e^{-0,5t} \cdot (10 - 5t)$$

$$\bullet$$

$$g(t) = 0 \Rightarrow 10 - 5t = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$\bullet$$

Skizze von  $g: e^{-0,5t}$  immer positiv

Skizze von  $(10 - 5t)$ :

$\Rightarrow t = 2$  Maximum, sogar absolutes Maximum, weil einziger Monotoniewechsel

$\Rightarrow g(2) = 20 \cdot e^{-1} \approx 7,36 \Rightarrow$  maximale Konzentration von  $7,36 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$  nach zwei Stunden

5.2

$$g(t) = e^{-0,5t} \cdot (-5) + (10 - 5t) \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = e^{-0,5t} (2,5t - 10)$$

$$g(t) = 0 \Rightarrow 2,5t - 10 = 0 \Rightarrow t = 4$$

Skizze von  $g: e^{-0,5t}$  immer positiv

Skizze von  $(2,5t - 10)$ :

$\Rightarrow$  Minimum von  $g$  bei  $t = 4$  Stunden

5.3

$$g(6) = 60 \cdot e^{-3} \Rightarrow P(6 / \frac{60}{e^3}) \quad \dot{g}(6) = e^{-3} \cdot (-20) = -\frac{20}{e^3}$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{20}{e^3} \cdot t + c \Rightarrow \frac{60}{e^3} = -\frac{20}{e^3} \cdot 6 + c \Rightarrow c = \frac{180}{e^3}$$

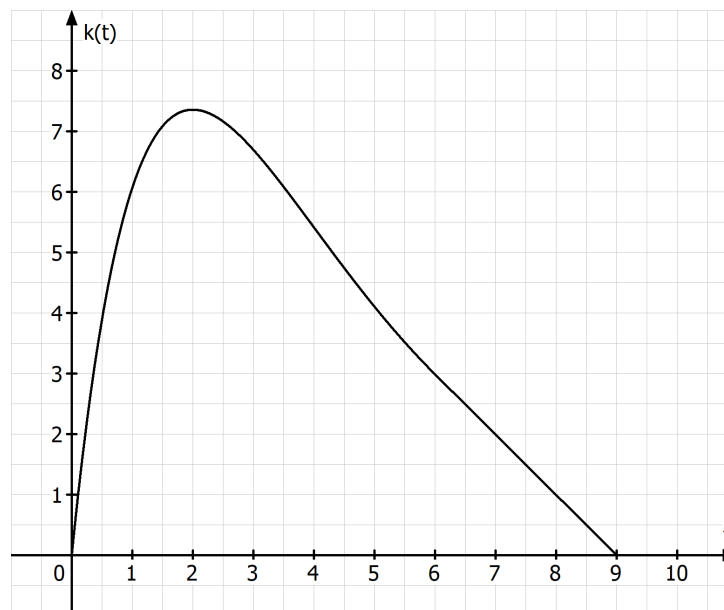
$$\Rightarrow s(t) = -\frac{20}{e^3} \cdot t + \frac{180}{e^3}$$

$$s(t) = 0 \Rightarrow -\frac{20}{e^3} \cdot t + \frac{180}{e^3} = 0 \Rightarrow t = 9$$

Nach 9 Stunden ist das Medikament vollständig abgebaut.

5.4

| t    | 0 | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9 |
|------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| k(t) | 0 | 6,1 | 7,4 | 7,0 | 5,4 | 4,1 | 3,0 | 2,0 | 1,0 | 0 |





6.1

$$y = 333 \cdot \left( e^{\frac{x-50}{666}} + e^{-\frac{x-50}{666}} \right) - 658$$

$$\overline{\text{FR}} = 333 \cdot \left( e^{\frac{110-50}{666}} + e^{-\frac{110-50}{666}} \right) - 658 \approx 10,7$$

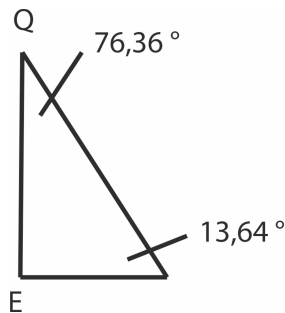
$$\overline{\text{EQ}} = 333 \cdot \left( e^{\frac{-110-50}{666}} + e^{-\frac{-110-50}{666}} \right) - 658 - (-0,1 \cdot (-110)) \approx 16,3$$

6.2

$$y' = 333 \cdot \left( e^{\frac{x-50}{666}} \cdot \frac{1}{666} + e^{-\frac{x-50}{666}} \cdot \left( -\frac{1}{666} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x-50}{666}} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x-50}{666}}$$

$$y' = -0,2426$$

$$\tan \alpha = -0,2426 \Rightarrow \alpha = -13,64^\circ \Rightarrow \varphi \approx 76,4^\circ$$



6.3

$$\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x-50}{666}} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x-50}{666}} = -0,1$$

$$\text{Substitution: } u = e^{\frac{x-50}{666}}$$

$$\frac{1}{2}u - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} = -0,1 \Rightarrow 0,5u^2 + 0,1u - 0,5 = 0 \Rightarrow u_1 \approx 0,90 \quad u_2 \approx -1,10$$

Resubstitution:

$$1) e^{\frac{x-50}{666}} = 0,90 \Rightarrow \frac{x-50}{666} = \ln 0,90 \Rightarrow x = 666 \cdot \ln 0,90 + 50 \approx -20,2$$

$$2) e^{\frac{x-50}{666}} = -1,10 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

7.1

$$T(0) = 18 \Rightarrow 10 \cdot (0 \cdot e + c) = 18 \Rightarrow 10c = 18 \Rightarrow c = 1,8$$

$$T(8) = 47,43 \Rightarrow 10 \cdot (8e^{1-8k} + 1,8) = 47,43 \Rightarrow 8e^{1-8k} + 1,8 = 4,743$$

$$\Rightarrow 8e^{1-8k} = 2,943 \Rightarrow e^{1-8k} = \frac{2,943}{8}$$

$$\Rightarrow 1-8k = \ln \left( \frac{2,943}{8} \right) \Rightarrow k = \frac{1 - \ln \left( \frac{2,943}{8} \right)}{8} \approx 0,25$$

## 7.2

$$\dot{T}(t) = 10 \cdot \left[ e^{1-0,25t} + t \cdot e^{1-0,25t} \cdot (-0,25) \right] = 10 \cdot e^{1-0,25t} (1 - 0,25t)$$

$$\dot{T}(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0,25t = 0 \text{ (weil } 10 \cdot e^{1-0,25t} \text{ immer positiv)} \Rightarrow t = 4$$

Skizze von  $\dot{T}$ :  $10 \cdot e^{1-0,25t}$  immer positiv

Skizze von  $(1 - 0,25t)$ :

$\Rightarrow$  Maximum für  $t = 4$

$\Rightarrow$  da nur ein Extremum (Maximum), tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $t = 4$

$$T(4) = 10 \cdot \left( 4 \cdot e^{1-0,25 \cdot 4} + 1,8 \right) = 58$$

$\Rightarrow$  die maximale Temperatur beträgt  $58^\circ\text{C}$

## 7.3

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) &= 10 \cdot e^{1-0,25t} \cdot (-0,25) - 2,5 \cdot e^{1-0,25t} - 2,5t \cdot e^{1-0,25t} \cdot (-0,25) = \\ &= -2,5 \cdot e^{1-0,25t} - 2,5 \cdot e^{1-0,25t} + 0,625t \cdot e^{1-0,25t} = \\ &= -5 \cdot e^{1-0,25t} + 0,625t \cdot e^{1-0,25t} = e^{1-0,25t} \cdot (0,625t - 5) \end{aligned}$$

$$\ddot{T}(t) = 0 \Rightarrow 0,625t - 5 = 0 \text{ (weil } e^{1-0,25t} \text{ immer positiv)} \Rightarrow t = 8$$

Skizze von  $\ddot{T}$ :  $e^{1-0,25t}$  immer positiv

Skizze von  $(0,625t - 5)$ :

$\Rightarrow$  Maximum von  $\ddot{T}$  für  $t = 8$

$\Rightarrow$  da  $\ddot{T}$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $t = 8$

$$\dot{T}(8) = 10 \cdot e^{1-0,25 \cdot 8} - 2,5 \cdot 8 \cdot e^{1-0,25 \cdot 8} = -10e^{-1} \approx -3,68$$

$\Rightarrow$  maximale Temperaturabnahme beträgt ca.  $3,68^\circ\text{C}$  pro Minute und liegt damit unter  $4^\circ\text{C}/\text{min}$

8.1

$$N(1) = 3 \cdot N_0 \Rightarrow N_0 \cdot e^{\lambda(-11)} = 3 \cdot N_0 \Rightarrow e^{\lambda(-11)} = 3 \Rightarrow -11\lambda = \ln 3$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 3}{-11} \approx -0,10$$

$$N(2) = 133 \Rightarrow N_0 \cdot e^{-0,10(-20)} = 133 \Rightarrow N_0 = \frac{133}{e^2} \approx 18$$

8.2

$$18e^{-0,1(t^2-12t)} \geq 540 \Rightarrow e^{-0,1(t^2-12t)} \geq 30 \Rightarrow -0,1(t^2-12t) \geq \ln(30)$$

$$\Rightarrow t^2 - 12t \leq \frac{\ln(30)}{-0,1} \Rightarrow t^2 - 12t + 34,01 \leq 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 12t + 34,01 = 0 \Rightarrow t_1 \approx 7,41 \quad t_2 \approx 4,59$$

Skizze von  $(t^2 - 12t + 34,01)$ :

$\Rightarrow$  erstmaliger Zeitpunkt  $t_0 \approx 4,59$

8.3

$$\dot{N}(t) = 18 \cdot e^{-0,1(t^2-12t)} \cdot (-0,2t + 1,2)$$

$$\dot{N}(t) = 0 \Rightarrow -0,2t + 1,2 = 0 \text{ (weil } 18 \cdot e^{-0,1(t^2-12t)} \text{ immer positiv)} \Rightarrow t = 6$$

Skizze von  $\dot{N}$ :  $18 \cdot e^{-0,1(t^2-12t)}$  immer positiv

Skizze von  $(-0,2t + 1,2)$ :

$\Rightarrow$  Maximum für  $t = 6$

$\Rightarrow$  da  $N$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $t = 6$

#### 8.4

$$\begin{aligned}\ddot{N}(t) &= -3,6e^{-0,1(t^2-12t)} \cdot (-0,2t+1,2) \cdot (t-6) + (-3,6e^{-0,1(t^2-12t)}) \cdot 1 = \\ &= -3,6e^{-0,1(t^2-12t)} \left[ (-0,2t+1,2) \cdot (t-6) + 1 \right] = \\ &= -3,6e^{-0,1(t^2-12t)} \left[ -0,2t^2 + 2,4t - 6,2 \right]\end{aligned}$$

$$\ddot{N}(t) = 0 \Rightarrow t_{1/2} = 6 \mp \sqrt{5} \text{ (nach Angabe)}$$

Skizze von  $\ddot{N}$ :  $-3,6e^{-0,1(t^2-12t)}$  immer positiv

Skizze von  $(-0,2t^2 + 2,4t - 6,2)$ :

$\Rightarrow t = 6 - \sqrt{5}$  Zeitpunkt, zu dem sich die Borkenkäfer am stärksten vermehren

$\Rightarrow$  da  $\dot{N}$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $t = 6 - \sqrt{5}$

#### 9.1

$$(I) k(50) = 30 \Rightarrow 2500a \cdot e^{-50b} = 30 \Rightarrow a = \frac{23 \cdot e^{50b}}{2500}$$

$$(II) k(250) = 17,5 \Rightarrow 62500a \cdot e^{-250b} = 10,5$$

$$(II) \Rightarrow 62500 \cdot \frac{23 \cdot e^{50b}}{2500} \cdot e^{-250b} = 10,5 \Rightarrow 575 \cdot e^{-200b} = 10,5$$

$$\Rightarrow e^{-200b} = \frac{21}{1150} \Rightarrow -200b = \ln\left(\frac{21}{1150}\right) \Rightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{21}{1150}\right)}{-200} \approx 0,020$$

$$\Rightarrow a = \frac{23 \cdot e^{500,020}}{2500} \approx 0,025$$

#### 9.2.1

$$k(67) = 0,025 \cdot 67^2 \cdot e^{-0,020 \cdot 67} + 7 \approx 36,4$$

Die CO<sub>2</sub>-Emissionsrate beträgt zu Beginn des Jahres 2017 36,4 Mrd. Tonnen pro Jahr.

### 9.2.2

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= 0,025 \cdot \left( 2t \cdot e^{-0,020t} + t^2 \cdot e^{-0,020t} \cdot (-0,020) \right) = \\ &= 0,025 \cdot e^{-0,020t} \cdot (2t - 0,020t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= 0 \Rightarrow 2t - 0,020t^2 = 0 \quad \text{da } 0,025 \cdot e^{-0,020t} \text{ immer positiv} \\ \Rightarrow t_1 &= 0 \quad t_2 = 100 \end{aligned}$$

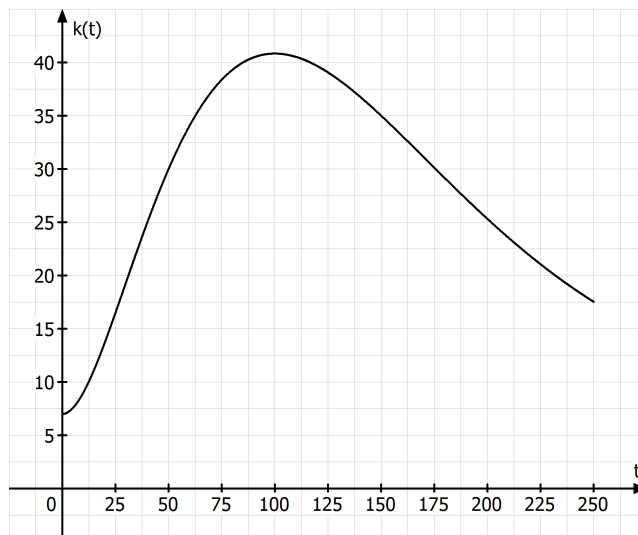
Skizze von  $0,025 \cdot e^{-0,020t}$  immer positiv

Skizze von  $(2t - 0,020t^2)$ :

$\Rightarrow t = 100$  Maximum

Da  $t = 100$  das einzige Maximum in  $D_k$ , tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow t = 100$  absolutes Maximum

### 9.2.3



#### 9.2.4

$$\begin{aligned} k''(t) &= 0,05 \cdot \left[ e^{-0,02t} \cdot (-0,02) \cdot (-0,01 \cdot t^2 + t) + e^{-0,02t} \cdot (-0,02t + 1) \right] = \\ &= 0,05 \cdot e^{-0,02t} \cdot [0,0002t^2 - 0,04t + 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k''(t) &= 0 \Rightarrow 0,0002t^2 - 0,04t + 1 = 0 \quad \text{da } 0,05 \cdot e^{-0,02t} \text{ immer positiv} \\ \Rightarrow t_1 &\approx 170,7 \quad t_2 \approx 29,9 \end{aligned}$$

Skizze von  $k'' : 0,05 \cdot e^{-0,02t}$  immer positiv

Skizze von  $(0,0002t^2 - 0,04t + 1)$ :

$\Rightarrow$  Maximum bei  $t = 29,9$

Da  $t = 29,9$  einziges Maximum in  $D_k$ , tritt keine weitere Änderung des

Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $t = 29,9$

$k'(29,9) > 0 \Rightarrow$  der größte Zuwachs der  $\text{CO}_2$ -Emissionsrate erfolgte im Jahr 1979

#### 9.2.5

$$\int_{66}^{67} k(t) dt = \left[ (-1,25t^2 - 125t - 6250) \cdot e^{-0,02t} + 7t \right]_{66}^{67} = -4829,77 - (-4866,01) = 36,2$$

Im Jahr 2016 werden ca. 36,2 Mrd. Tonnen  $\text{CO}_2$  ausgestoßen.

#### 10.1

$$(I) M(0) = 0,8 \Rightarrow a = 0,8$$

$$(II) M(3) = 3,59 \Rightarrow a \cdot e^{3b} = 3,59$$

$$(II) \Rightarrow 0,8 \cdot e^{3b} = 3,59 \Rightarrow e^{3b} = 4,4875 \Rightarrow 3b = \ln(4,4875) \Rightarrow b = \frac{\ln(4,4875)}{3} \approx 0,5$$

#### 10.2

$$\frac{M(4) - M(0)}{4 - 0} = \frac{5,911 - 0,8}{4} \approx 1,3$$

In den ersten vier Tagen beträgt die mittlere Zuwachsrate des Mehlwürmerbestandes 1,3 kg/Tag.

#### 10.3

$$M(t) = 0,8 \cdot e^{0,5t} \cdot 0,5 = 0,4 \cdot e^{0,5t}$$

$$\Rightarrow 0,4 \cdot e^{0,5t} = 1,2 \Rightarrow e^{0,5t} = 3 \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{0,5} \approx 2,2$$

$$\Rightarrow M(2,2) = 0,8 \cdot e^{0,5 \cdot 2,2} \approx 2,4$$

Der Bestand an Mehlwürmern beträgt 2,4 kg.

### 11.1

$$105 \text{ min} = 1,75 \text{ h}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 1,75 \cdot e^{\frac{1}{\lambda} \cdot 1,75} = 4,88 \Rightarrow e^{\frac{1}{\lambda} \cdot 1,75} = \frac{488}{875} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \cdot 1,75 = \ln\left(\frac{488}{875}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1,75}{\ln\left(\frac{488}{875}\right)} \approx -2,997$$

### 11.2.1

$$\bullet \quad k(t) = 5 \cdot e^{-\frac{1}{3}t} + 5t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}t} \left(5 - \frac{5}{3}t\right)$$

$$\bullet \quad k(t) = 0 \Rightarrow 5 - \frac{5}{3}t = 0 \quad (e^{-\frac{1}{3}t} \text{ immer positiv}) \Rightarrow t = 3$$

Skizze von  $k$ :  $e^{-\frac{1}{3}t}$  immer positiv

Skizze von  $\left(5 - \frac{5}{3}t\right)$ :

$\Rightarrow$  Maximum für  $t = 3$

$\Rightarrow$  Da  $k$  für  $t \geq 0$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow t = 3$  absolutes Maximum

$$k(3) = \frac{15}{e} \approx 5,518$$

Nach drei Stunden hat die Konzentration des Medikaments mit  $5,518 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$  ihren absoluten größten Wert.

### 11.2.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(5t \cdot e^{-\frac{1}{3}t}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{5t}{e^{\frac{1}{3}t}}\right) \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{e^{\frac{1}{3}t} \cdot \frac{1}{3}}\right) = 0$$

Nach längerer Zeit sinkt die Konzentration des Medikaments auf  $0 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ .

#### 11.2.4

Konzentration nach acht Stunden:

$$\int_0^8 k(t) dt = \left[ \left( -15t + 45 \right) \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \right]_0^8 = -165e^{-\frac{8}{3}} + 45 = 33,53523...$$

$$\Rightarrow \frac{-165e^{-\frac{8}{3}} + 45}{8} = 4,19190... \Rightarrow 4,192 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

#### 12.1

$$G(0) = 20 \cdot e^{-0,2 \cdot 0} + 70 = 20 + 70 = 90$$

Zu Beginn der Diät hat der Kunde 90 kg

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (20 \cdot e^{-0,2t} + 70) = 70$$

Nach sehr langer Anwendung der Diät soll der Kunde ein Idealgewicht von 70 kg erreichen.

#### 12.2

Angestrebte Gewichtsreduzierung: 20 kg    75% von 20 kg = 15 kg

$$20 \cdot e^{-0,2t_1} + 70 = 75 \Rightarrow e^{-0,2t_1} = 0,25 \Rightarrow t_1 = \frac{\ln(0,25)}{-0,2} \approx 6,93$$

Nach knapp 7 Monaten sind 75 % der angestrebten Gewichtsreduzierung erreicht.

#### 12.3

$$\dot{G}(t) = 20 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) = -4 \cdot e^{-0,2t} \Rightarrow \dot{G}(0) = -4$$

Die Gewichtsabnahmerate beträgt zu Beginn 4 kg pro Monat.

Nach dieser Diät würde das angestrebte Idealgewicht von 70 kg nach fünf Monaten erreicht.

$$N_0 \cdot e^{30,5-0,5^2} = 1745 \Rightarrow N_0 \cdot e^{1,25} = 1745 \Rightarrow N_0 = \frac{1745}{e^{1,25}} \approx 500$$

$$\dot{N}(t) = 500 \cdot e^{3t-t^2} \cdot (3-2t) \quad \dot{N}(t) = 0 \Rightarrow 3-2t = 0 \Rightarrow t = 1,5$$

Skizze von  $\dot{N}$ :  $500 \cdot e^{3t-t^2}$  immer positiv

Skizze von  $(3-2t)$ :

#### 13.1

$$\Rightarrow t = 1,5 \text{ HOP}$$

Da  $N$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow t = 1,5$  absolutes Maximum

$$N(1,5) \approx 4744$$

Nach 1,5 Stunden liegt die größte Anzahl an Pilzen, nämlich 4744 vor.



### 13.2

$$\ddot{N}(t) = 500 \cdot e^{3t-t^2} \cdot (3-2t) \cdot (3-2t) + 500 \cdot e^{3t-t^2} \cdot (-2) = 500 \cdot e^{3t-t^2} \cdot (4t^2 - 12t + 7)$$

$$\ddot{N}(t) = 0 \Rightarrow 4t^2 - 12t + 7 = 0 \Rightarrow t_1 \approx 0,79 \quad t_2 \approx 2,21$$

Skizze von  $\ddot{N}$ :  $500 \cdot e^{3t-t^2}$  immer positiv

Skizze von  $(4t^2 - 12t + 7)$ :

$\Rightarrow t_1 \approx 0,79$  L-R-Krümmungswechsel  $t_2 \approx 2,21$  R-L-Krümmungswechsel

Das bedeutet, dass die Pilzkultur nach etwa 0,79 Stunden am stärksten wächst und nach 2,21 Stunden am stärksten abnimmt.

$t_1 \approx 0,79$  und  $t_2 \approx 2,21$  sind Wendestellen.

### 13.3

$$500 \cdot e^{3t-t^2} < 1 \Rightarrow e^{3t-t^2} < 0,002 \Rightarrow 3t-t^2 < \ln(0,002)$$

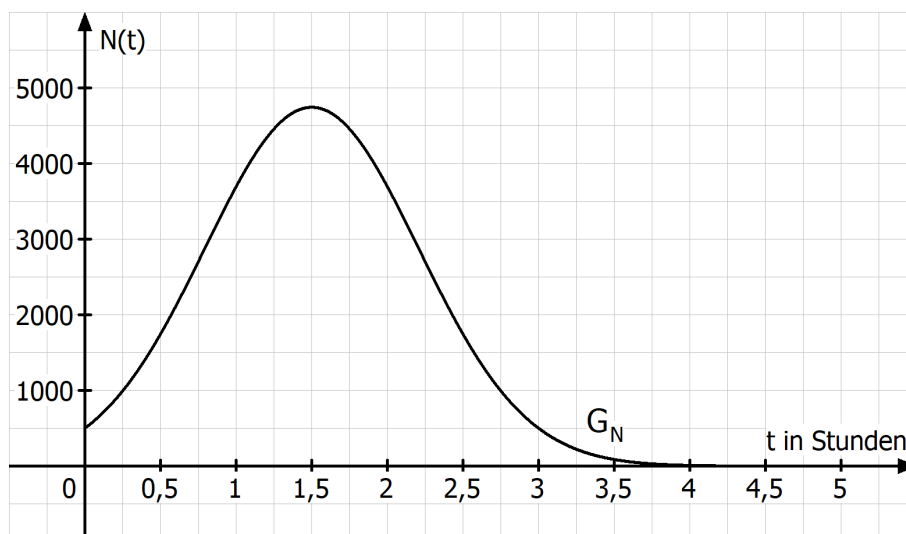
$$\Rightarrow -t^2 + 3t - \ln(0,002) < 0$$

$$\Rightarrow -t^2 + 3t - \ln(0,002) = 0 \Rightarrow (t_1 \approx -1,41) \notin D \quad t_2 \approx 4,41$$

Skizze von  $(-t^2 + 3t - \ln(0,002))$ :

$\Rightarrow$  die Pilzkultur ist nach etwa 4,41 Stunden völlig abgestorben.

### 13.4



#### 14.1

$$\dot{B}(t) = -15 \cdot e^{-0,15t} + (-15t + 5) \cdot e^{-0,15t} \cdot (-0,15) = e^{-0,15t} \cdot (2,25t - 15,75)$$

$$\dot{B}(t) = 0 \Rightarrow 2,25t - 15,75 = 0 \Rightarrow t = 7$$

Skizze von  $\dot{B}$ :  $e^{-0,15t}$  immer positiv

Skizze von  $(2,25t - 15,75)$ :

$$\Rightarrow t = 7 \text{ TIP}$$

Da  $B$  nur ein Extremum (Minimum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow t = 7$  absolutes Minimum

$$B(7) = (-15 \cdot 7 + 5) \cdot e^{-0,15 \cdot 7} + 70 \approx 35$$

$\Rightarrow$  Der Bestand des Gelbflossenthuns hat nach 7 Jahren (also am 1.1.2002) seinen minimalsten Bestand von etwa 35 Millionen erreicht.

#### 14.2

$$B(0) = (-15 \cdot 0 + 5) \cdot e^{-0,15 \cdot 0} + 70 = 5 + 70 = 75$$

Am 1.1.1995 beträgt der Bestand 75 Millionen Fische.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((-15 \cdot t + 5) \cdot e^{-0,15t} + 70) = 70$$

Nach sehr langer Zeit stellt sich ein Bestand von 70 Millionen Fischen ein.

#### 14.3

$$B(16,5) = (-15 \cdot 16,5 + 5) \cdot e^{-0,15 \cdot 16,5} + 70 \approx 49,59$$

$$\dot{B}(16,5) = (2,25 \cdot 16,5 - 15,75) \cdot e^{-0,15 \cdot 16,5} \approx 1,80$$

Am 1.7.2011 betrug der Bestand 49,59 Fische und die Zuwachsrate betrug 1,80 Millionen Fische pro Jahr.

14.4

$$\ddot{B}(t) = 2,25 \cdot e^{-0,15t} + (2,25t - 15,75) \cdot e^{-0,15t} \cdot (-0,15) = e^{-0,15t} \cdot \left( -\frac{27}{80}t + \frac{369}{80} \right)$$

$$\ddot{B}(t) = 0 \quad -\frac{27}{80}t + \frac{369}{80} = 0 \Rightarrow t = \frac{41}{3}$$

Skizze von  $\ddot{B}$ :  $e^{-0,15t}$  immer positiv

$$\text{Skizze von } \left( -\frac{27}{80}t + \frac{369}{80} \right):$$

$\Rightarrow t = \frac{41}{3}$  WP mit L – R – Krümmungswechsel, damit liegt dort die Stelle

mit der größten Bestandszunahme vor.

Da  $\dot{B}$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere

Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow t = \frac{41}{3}$  absolutes Maximum von  $\dot{B}$

Im Jahr 2008 liegt demnach die größte Bestandszunahme des Gelbflossenthuns vor.

15.1

$$\dot{N}(t) = 4t \cdot e^{-0,5t} + 2t^2 \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = e^{-0,5t} \cdot (4t - t^2)$$

$$e^{-0,5t} \cdot (4t - t^2) = 0 \Rightarrow 4t - t^2 = 0 \Rightarrow t(4 - t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 4$$

Skizze von  $\dot{N}$ :  $e^{-0,5t}$  immer positiv

Skizze von  $(4t - t^2)$ :

$\Rightarrow$  Maximum für  $t = 4$

Da  $N$  im Bereich  $[0; \infty[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich

keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $t = 4$

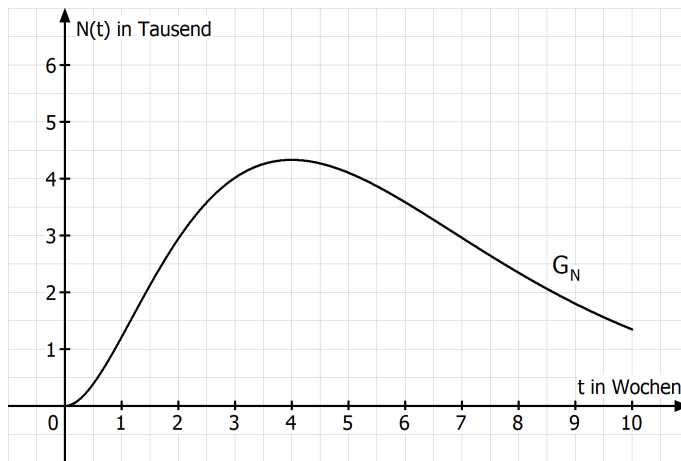
$$N(4) = 4,33$$

Nach vier Wochen ist die Zahl der neu erkrankten Menschen mit 4330 am größten.

15.2  $t \rightarrow \infty \quad 2t^2 \cdot e^{-0,5t} \rightarrow 0_+$  (weil e-Funktion überwiegt)

Langfristig wird es keine Neuerkrankungen mehr geben.

15.3



15.4

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= (-8t - 16) \cdot e^{-0,5t} + (-4t^2 - 16t - 32) \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = \\ &= e^{-0,5t} \cdot (-8t - 16 + 2t^2 + 8t + 16) = e^{-0,5t} \cdot 2t^2 = N(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow G$  ist Stammfunktion von  $N$

$$\int_0^8 N(t) dt = \left[ (-4t^2 - 16t - 32) \cdot e^{-0,5t} \right]_0^8 = (-416 \cdot e^{-4}) - (-32) = 24,38$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \cdot 24,38 = 3,05$$

Durchschnittlich gab es in den ersten acht Wochen etwa 3050 Neuerkrankungen.

16.1

$$\frac{46,79 - 10}{2 - 0} = 18,395$$

In den ersten beiden Stunden beträgt die durchschnittliche Zunahme der Bakterien etwa 18395 pro Stunde.

16.2

$$k'_{III}(t) = 50 \cdot e^{-0,5t} + 50t \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = e^{-0,5t} \cdot (50 - 25t)$$

$$k'_{III}(4) = e^{-2} \cdot (50 - 100) = -6,767$$

$$-6,767 \cdot 1000 : 60 = -112,78$$

$\Rightarrow$  Die Angabe ist nahezu richtig.

16.3

$$k_{II}(4) = 50 \Rightarrow 50 \cdot 4 \cdot e^{-a_2 \cdot 4} + 10 = 50 \Rightarrow e^{-a_2 \cdot 4} = 0,2 \Rightarrow -4a_2 = \ln(0,2) \Rightarrow a_2 = \frac{\ln(0,2)}{-4} = 0,40$$

Je größer  $a$  ist, desto wirksamer ist das Gift.

### 17.1

$$N(2) = 3e^{-0,2} \approx 2,456$$

Nach diesem Modell befinden sich um 12 Uhr 2456 Besucher im Tierpark.

$$0,9 \cdot 2456 \approx 2210 \quad 1,1 \cdot 2456 \approx 2702$$

Die tatsächliche Besucherzahl um 12 Uhr muss im Intervall  $[2210; 2702]$  liegen.

### 17.2.1

$$\frac{1}{4}(8t - t^2) \cdot e^{-0,4t-1} \geq 4 \Rightarrow t \in [2,8; 7,8] \text{ (nach Zeichnung)}$$

$\Rightarrow$  Die Eisdiele ist zwischen 12:48 Uhr und 17:48 Uhr rentabel.

### 17.2.2

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= \frac{1}{4} \left[ (8-2t)e^{0,4t-1} + (8t-t^2)e^{0,4t-1} \cdot (0,4) \right] = \\ &= \frac{1}{4} e^{0,4t-1} (8-2t+3,2t-0,4t^2) = \frac{1}{4} e^{0,4t-1} (-0,4t^2 + 1,2t + 8) \end{aligned}$$

$$\dot{N}(t) = 0 \Rightarrow -0,4t^2 + 1,2t + 8 = 0 \quad \left( \frac{1}{4} e^{0,4t-1} \text{ immer positiv} \right)$$

$$\Rightarrow (t_1 \approx -3,22) \notin D \quad t_2 \approx 6,22$$

Skizze von  $\dot{N}$ :  $\frac{1}{4} e^{0,4t-1}$  immer positiv

Skizze von  $(-0,4t^2 + 1,2t + 8)$ :

$$\Rightarrow t \approx 6,22 \text{ Maximum}$$

Da für  $t \in \mathbb{R}_0^+$  nur ein Extremum (Maximum) auftritt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow t \approx 6,22 \text{ absolutes Maximum}$$

$$N_{\max} = N(6,22) \approx 12,257 \Rightarrow 12257 \text{ Besucher}$$

### 18.1

$$w(40) \approx 24,51$$

$\Rightarrow$  Am 01.01.2000 betrug der Holzbestand etwa 245100 m<sup>3</sup>.

### 18.2

$$\dot{w}(t) = 0,1 \cdot 2t \cdot e^{-0,06t} + 0,1 \cdot t^2 \cdot e^{-0,06t} \cdot (-0,06) = e^{-0,06t} \cdot (0,2t - 0,006t^2)$$

$$\dot{w}(10) \approx 0,7683$$

$\Rightarrow$  am 01.01.1970 betrug die Zuwachsrate des Holzbestandes etwa 7683 m<sup>3</sup> pro Jahr.

18.3

$$\frac{w(20) - w(11)}{9} \approx 0,6438$$

⇒ der durchschnittliche Holzzuwachs im Zeitraum vom 01.01.1971 bis 01.01.1980 betrug etwa 6438 m<sup>3</sup> pro Jahr.

18.4

$$w(t) = 0 \Rightarrow 0,2t - 0,006t^2 = 0 \quad \text{da } e^{-0,06t} \text{ immer positiv}$$

$$\Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{100}{3} \approx 33,33$$

Skizze von  $w$ :  $e^{-0,06t}$  immer positiv

Skizze von  $(0,2t - 0,006t^2)$ :

⇒ Maximum für  $t = 33,33$

Da  $w$  für  $t \in \mathbb{R}_0^+$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

⇒ absolutes Maximum für  $t = 33,33$

⇒ im Jahr 1993 war der Holzbestand am größten.

19.1

$$T(t) = a \cdot e^{bt} + 22$$

$$T(0) = 80 \Rightarrow a \cdot 1 + 22 = 80 \Rightarrow a = 58$$

$$T(20) = 30 \Rightarrow 58 \cdot e^{20b} + 22 = 30 \Rightarrow 58 \cdot e^{20b} = 8 \Rightarrow e^{20b} = \frac{4}{29}$$

$$\Rightarrow 20b = \ln\left(\frac{4}{29}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{20} \cdot \ln\left(\frac{4}{29}\right) \approx -0,1$$

Für große Werte von  $t$  nähert sich  $T(t)$  22 an. Langfristig wird sich eine Teetemperatur von 22 °C einstellen.

19.2

$$54 = 58 \cdot e^{-0,1t} + 22 \Rightarrow 58 \cdot e^{-0,1t} = 32 \Rightarrow e^{-0,1t} = \frac{16}{29}$$

$$\Rightarrow -0,1t = \ln\left(\frac{16}{29}\right) \Rightarrow t = -10 \cdot \ln\left(\frac{16}{29}\right) \approx 6$$

⇒ etwa um 9:01 Uhr wird die Temperatur von 54 °C erreicht.

## 20.1

$$M(t) = a \cdot e^{bt}$$

$$(I) M(2) = 400 \Rightarrow a \cdot e^{2b} = 400$$

$$(II) M(9) = 140 \Rightarrow a \cdot e^{9b} = 140$$

$$(I) \Rightarrow a = \frac{400}{e^{2b}}$$

$$(II) \Rightarrow \frac{400}{e^{2b}} \cdot e^{9b} = 140 \Rightarrow 400 \cdot e^{7b} = 140 \Rightarrow e^{7b} = \frac{7}{20} \Rightarrow 7b = \ln\left(\frac{7}{20}\right)$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{7} \cdot \ln\left(\frac{7}{20}\right) \approx -0,15 \Rightarrow a = \frac{400}{e^{-0,30}} \approx 540$$

$$\Rightarrow \text{Rasenfläche: } 540 \text{ m}^2 \hat{=} 90 \% \quad x \text{ m}^2 \hat{=} 100 \% \Rightarrow x = \frac{540 \cdot 100}{90} = 600 \text{ m}^2$$

## 20.2

$$\text{Mit Moos bedeckte Fläche: } 540 \text{ m}^2 \Rightarrow 0,35 \cdot 540 = 189 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow 189 = 540 \cdot e^{-0,15t} \Rightarrow e^{-0,15t} = 0,35 \Rightarrow -0,15t = \ln(0,35) \Rightarrow t = \frac{\ln(0,35)}{-0,15} \approx 7$$

$\Rightarrow$  Die Werbeaussage trifft annähernd zu.

## 21.1

$$T(0) = -34 \cdot e^0 + 24 = -10 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$t \rightarrow +\infty \quad -34 \cdot \underbrace{e^{-0,015t}}_{\rightarrow 0_+} + 24 \rightarrow 24 \Rightarrow \text{Zimmertemperatur: } 24 \text{ } ^\circ\text{C}$$

## 21.2

$$20 = -34 \cdot e^{-0,015t} + 24 \Rightarrow -34 \cdot e^{-0,015t} = -4 \Rightarrow e^{-0,015t} = \frac{2}{17}$$

$$\Rightarrow -0,015t = \ln\left(\frac{2}{17}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{17}\right)}{-0,015} \approx 143$$

Mit der Untersuchung kann um 9:23 Uhr begonnen werden.

## 22.1

$$p(0) = 6,5 \Rightarrow p_0 \cdot e^0 = 6,5 \Rightarrow p_0 = 6,5$$

$$p(2) = 6,0 \Rightarrow 6,5 \cdot e^{2k} = 6,0 \Rightarrow e^{2k} = \frac{12}{13} \Rightarrow 2k = \ln\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{12}{13}\right)}{2} \approx -0,04$$

## 22.2

$$6,5 \cdot e^{-0,04t} < 0,1 \cdot 6,5 \Rightarrow e^{-0,04t} < 0,1 \Rightarrow -0,04t < \ln(0,1)$$

$$\Rightarrow t > \frac{\ln(0,1)}{-0,04} \approx 57,56$$

Der Kompressor beginnt mit dem erneuten Verdichten nach ca. 58 Minuten.

- 23 Bestimmen Sie den Zeitpunkt  $t_1$ , zu dem die Anzahl der Bakterien noch 40 % vom Anfangsbestand beträgt.

$$0,4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1} \Rightarrow t_1 = \log_{0,5}(0,4)$$

## 24.1

$$(I) N(5) = 18 \Rightarrow N_0 \cdot e^{5c} = 18$$

$$(II) N(9) = 60 \Rightarrow N_0 \cdot e^{9c} = 60$$

$$(I) \Rightarrow N_0 = \frac{18}{e^{5c}}$$

$$(I) \text{ in } (II) \Rightarrow \frac{18}{e^{5c}} \cdot e^{9c} = 60 \Rightarrow 18 \cdot e^{4c} = 60 \Rightarrow e^{4c} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 4c = \ln\left(\frac{10}{3}\right) \Rightarrow c = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{4} \approx 0,301$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{18}{e^{5 \cdot 0,301}} \approx 4$$

## 24.2.1

$$4 \cdot e^{0,301t} = 440 \Rightarrow e^{0,301t} = 110 \Rightarrow 0,301t = \ln(110) \Rightarrow t = \frac{\ln(110)}{0,301} \approx 15,62$$

Im Jahr 2024 wird die Anzahl der Wolfsrudel voraussichtlich 440 erreichen.

## 24.2.2

$$N(t) = 4 \cdot 1,351^t \quad e^{0,301} \approx 1,351$$

Die Anzahl der Wolfsrudel nimmt im Jahr um ca. 35,1 % zu.

## 25.1

$$E(0) = 86,3 \quad E(3) = 70$$

$$\Rightarrow \frac{86,3 - 70}{0 - 3} = -\frac{163}{30} \approx -5,43$$

Von 2014 bis 2017 war pro Jahr ein durchschnittlicher Ertragsrückgang von ca. 5,43 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zu verzeichnen.



## 25.2

$$(I) 56,3 \cdot e^{c \cdot 0} + a = 86,3 \Rightarrow a = 30$$

$$(II) 56,3 \cdot e^{3c} + a = 70$$

$$(II) \Rightarrow 56,3 \cdot e^{3c} + 30 = 70 \Rightarrow 56,3 \cdot e^{3c} = 40 \Rightarrow e^{3c} = \frac{40}{56,3}$$

$$\Rightarrow 3c = \ln\left(\frac{40}{56,3}\right) \Rightarrow c = \frac{\ln\left(\frac{40}{56,3}\right)}{3} \approx -0,11$$

### 25.3.1

$$56,3 \cdot e^{-0,11t} + 30 = 50 \Rightarrow 56,3 \cdot e^{-0,11t} = 20 \Rightarrow e^{-0,11t} = \frac{20}{56,3}$$

$$\Rightarrow -0,11t = \ln\left(\frac{20}{56,3}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{20}{56,3}\right)}{-0,11} \approx 9,41$$

$\Rightarrow$  ab dem Jahr 2024

### 25.3.2

$$t \rightarrow \infty \quad 56,3 \cdot \underbrace{e^{-0,11t}}_{\rightarrow 0^+} + 30 \rightarrow 30$$

Der durchschnittliche Ertrag pro Hektar Anbaufläche würde langfristig bei 30 Dezitonnen liegen.

### 25.3.3

$$\frac{E(1) + E(2) + E(3)}{3} = \frac{80,44 + 75,18 + 70,48}{3} \approx 75,37 \quad E(4) \approx 66,26$$

$$\frac{66,26}{75,37} \approx 0,8791 \Rightarrow \text{Ertragsrückgang von 12,09 \%}$$

$\Rightarrow$  es gab keine Antragsberechtigung

## 26.1 $A(t) = 0,5 \cdot 2^t$

### 26.2

$$2^t = \left(e^{\ln 2}\right)^t = \left(e^{0,6931}\right)^t = e^{0,6931t} \Rightarrow A(t) = 0,5 \cdot e^{0,6931t}$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot 188,5 = \frac{377}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{377}{3} = 0,5e^{0,6931t} \Rightarrow e^{0,6931t} = \frac{754}{3} \Rightarrow 0,6931t = \ln\left(\frac{754}{3}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{754}{3}\right)}{0,6931} \approx 7,97$$

Nach etwa 8 Tagen wären  $\frac{2}{3}$  der gesamten Beckengrundfläche von Algen bedeckt.

$$\Rightarrow 3773 = 0,$$

$$27.1 \quad 0,5^{\frac{t}{4,88}} = \left( e^{\ln 0,5} \right)^{\frac{t}{4,88}} = \left( e^{\frac{\ln 0,5}{4,88}} \right)^t = \left( e^{-0,142} \right)^t = e^{-0,142 \cdot t}$$

27.2

$$2000 \cdot e^{-0,142t} = 100 \Rightarrow e^{-0,142t} = 0,05 \Rightarrow -0,142t = \ln(0,05) \Rightarrow t = \frac{\ln(0,05)}{-0,142} \approx 21,097$$

Das Ladegerät schaltet sich nach etwa 21 Minuten ab.

$$D = [0; 21]$$

28.1

$$T(5) = 250 \cdot 5 \cdot e^{-0,15} + 22 = 780,16$$

⇒ Die Temperatur beträgt nach fünf Minuten ca. 780°C

$$t \rightarrow +\infty \quad \underbrace{250 \cdot \underbrace{t}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,1t}}_{\rightarrow 0^+}}_{\rightarrow 0^+} + 22 \rightarrow 22 \quad (\text{e-Funktion überwiegt})$$

Auf lange Sicht stellt sich eine Temperatur von 22°C ein.

28.2

$$\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0,1t} + 250 \cdot t \cdot e^{-0,1t} \cdot (-0,1) = e^{-0,1t} \cdot (250 - 25t)$$

$$\dot{T}(t) = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{-0,1t}}_{>0} \cdot (250 - 25t) = 0 \Rightarrow 250 - 25t = 0 \Rightarrow t = 10$$

Skizze von  $\dot{T}$ :  $e^{-0,1t}$  immer positiv

Skizze von  $(250 - 25t)$ :

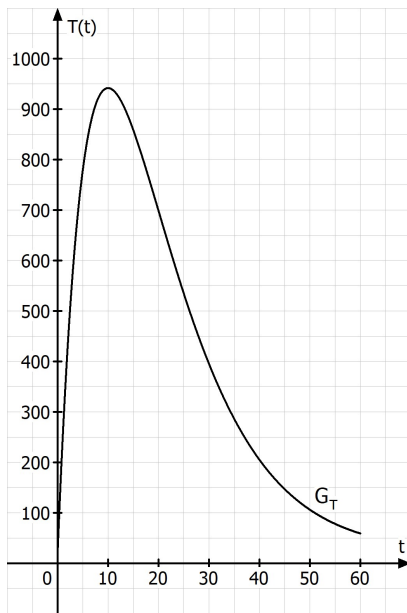
⇒  $t = 10$  Maximum

Da  $T$  für  $t \geq 0$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf ⇒  $t = 10$  absolutes Maximum

$$T(10) = 250 \cdot 10 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} + 22 = 941,70$$

⇒ Das Temperaturmaximum beträgt ca. 942°C

28.3



$$T(0) = 22 \Rightarrow 22 \cdot 20 = 440 \Rightarrow t_{20\text{-fach}} \approx 28$$

28.4

$$\dot{T}(20) = (250 - 25 \cdot 20) \cdot e^{-0,1 \cdot 20} \approx -33,83$$

Nach 20 Minuten ist die Abkühlgeschwindigkeit mit  $34 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$  betraglich am größten

29.1

$$p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$(I) \quad p(0) = 6,0 \Rightarrow 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot 0} = 6,0 \Rightarrow b = 2,8$$

$$(II) \quad p(40) = 3,5$$

$$\Rightarrow 3,2 + b \cdot e^{-40k} = 3,5 \Rightarrow 2,8 \cdot e^{-40k} = 0,3 \Rightarrow e^{-40k} = \frac{3}{28}$$

$$\Rightarrow -40k = \ln\left(\frac{3}{28}\right) \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{3}{28}\right)}{-40} \approx 0,056$$

### 29.2.1

$$p(t) = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056t}$$

$$3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056t} = 4,0 \Rightarrow 2,8 \cdot e^{-0,056t} = 0,8 \Rightarrow e^{-0,056t} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow -0,056t = \ln\left(\frac{2}{7}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{-0,056} \approx 22,37$$

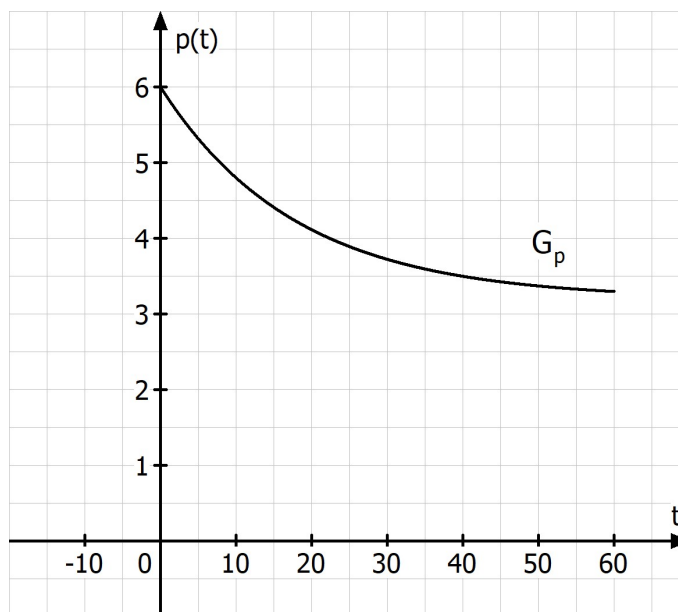
$\Rightarrow$  die Zugabe des Sauerteigs zum Brotteig ist nach etwa 22,4 Stunden möglich

$$p'(t) = 2,8 \cdot e^{-0,056t} \cdot (-0,056) = -0,1568 \cdot e^{-0,056t}$$

$$p'(22,4) = -0,045$$

Die Abnahmegeschwindigkeit beträgt nach 22,4 Stunden 0,045 pro Stunde.

### 29.2.2



### 30.1

$$N(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^{-0,2} + 5 = 5 \quad N(5) = 2 \cdot 25 \cdot e^{-0,875} + 5 = 26,91$$

Zu Beginn sind es etwa 5000 Bienen und nach fünf Wochen knapp 27000 Bienen.

### 30.2

$$\dot{N}(t) = 4t \cdot e^{-0,125t-0,2} + 2t^2 \cdot e^{-0,125t-0,2} \cdot (-0,125) = e^{-0,125t-0,2} \cdot (4t - 0,25t^2)$$

$$\dot{N}(t) = 0 \Rightarrow 4t - 0,25t^2 = 0 \quad e^{-0,125t-0,2} > 0$$

$$\Rightarrow t(4 - 0,25t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad 4 - 0,25t = 0 \Rightarrow t_2 = 16$$

Skizze von  $\dot{N}$ :  $e^{-0,125t-0,2}$  immer positiv

Skizze von  $(4t - 0,25t^2)$ :

$\Rightarrow t = 16$  Maximum

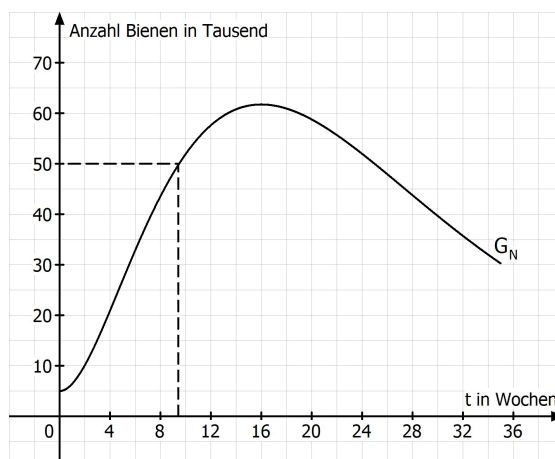
Bei  $t = 16$  einziger Monotoniewechsel im betrachteten Bereich

$\Rightarrow t = 16$  absolutes Maximum

$$N(16) = 61,73$$

Nach 16 Wochen ist mit 61730 die maximale Anzahl von Bienen erreicht.

### 30.3



Nach etwa zehn Wochen, also im Mai beträgt die Anzahl der Bienen erstmals über 50000.

30.4 Laut Angabe liegt bei  $x = 4,7$  eine Wendestelle vor, nach Zeichnung an dieser Stelle die größte Steigung. Nach 4,7 Wochen nimmt die Anzahl der Bienen am stärksten zu und zwar um 6,04 Tausend Bienen pro Woche.

### 31.1

$$t \rightarrow +\infty \quad 36,5 + \underbrace{2t \cdot \underbrace{e^{-0,25t}}_{\rightarrow 0_+}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow 36,5 \quad e\text{-Funktion dominiert}$$

Langfristig stellt sich eine Temperatur von 36,5 °C ein.

31.2

$$\dot{T}(t) = 2e^{-0,25t} + 2t \cdot e^{-0,25t} \cdot (-0,25) = e^{-0,25t} (2 - 0,5t)$$

$$\dot{T}(t) = 0 \Rightarrow 2 - 0,5t = 0 \quad e^{-0,25t} > 0 \Rightarrow t = 4$$

Skizze von  $\dot{T}$ :  $e^{-0,25t}$  immer positiv

Skizze von  $(2 - 0,5t)$ :

$\Rightarrow t = 4$  Maximum

Bei  $t = 4$  einziger Monotoniewechsel im betrachteten Zeitraum

$\Rightarrow t = 4$  absolutes Maximum

$$T(4) = 39,4^\circ\text{C}$$

Die höchste Körpertemperatur der erkrankten Person beträgt  $39,4^\circ\text{C}$ .